Nom : .... **Prénom :** .... Classe :......

Interrogation n°6

On prendra soin de coller le sujet sur la copie. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et de l'application.

Exercice 1. ***R.O.C, Polynésie-juin 2005*** (2 points)
Prérequis : définition d'une suite tendant vers $+\infty$. « Une suite tend vers $+\infty$ si, pour tout réel A, tous les termes de la suite sont, à partir d'un certain rang, supérieurs à A ».
Démontrer le théorème suivant : *une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.*

Exercice 2. (6 points)
Soit f la fonction f définie sur l'intervalle $[0;2]$ par :

$$f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$$

1. Etudier les variations de f sur l'intervalle $[0;2]$.
2. Montrer que si $x \in [1;2]$ alors $f(x) \in [1;2]$.
3. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n) = \dfrac{2u_n+1}{u_n+1}$
   (a) Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que :
   Pour tout entier naturel n, $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$
   (b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

Exercice 3. (2 points)
Démontrer que la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote que l'on précisera :

$$f : x \longmapsto \frac{5x^5+3x-1}{-x^5+4x^4+2x-7}$$

Nom : .... **Prénom :** .... Classe :......

Interrogation n°6

On prendra soin de coller le sujet sur la copie. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et de l'application.

Exercice 1. R.O.C (2 points)
On considère la fonction partie entière E qui a tout x réel associe le plus grand entier inférieur ou égal à x.
Montrer que la fonction partie entière est discontinue pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2. (6 points)
On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout entier naturel n, par :

$$u_0 = 3 \qquad \text{et} \qquad v_0 = 4 \qquad u_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2} \qquad ; \qquad v_{n+1} = \frac{u_{n+1}+v_n}{2}$$

1. Calculer u_1, v_1, u_2 et v_2.
2. Soit la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_n = v_n - u_n$.
   (a) Montrer que la suite (w_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$
   (b) Exprimer w_n en fonction de n et préciser la limite de la suite (w_n).

Exercice 3. (2 points)
Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1+4\cos x}{1+x^2}$$