Nom : . . . . **Prénom :** . . . . Classe :. . . . . .

Interrogation n°5

On prendra soin de coller le sujet sur la copie. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et de l'application.

Exercice 1. R.O.C (4 points)

1. Montrer, par récurrence, que pour tout réel x positif et pour tout entier n, on a :

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

2. Soit (u_n) une suite définie par $u_n = q^n$ (avec $q > 0$).
   (a) En utilisant la première question (on posera $q = x+1$) montrer que u_n a pour limite $+\infty$ lorsque $q > 1$.
   (Hors Barème) Si $q \in]0;1[$, en posant $q' = \dfrac{1}{q} > 1$ démontrer que u_n converge ves 0

Exercice 2. (5 points)

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = \frac{2u_n+3}{u_n+4}$$

1. On pose, pour tout entier n, $v_n = \dfrac{u_n-1}{u_n+3}$.
   (a) Montrer que $v_{n+1} = \dfrac{u_n-1}{5u_n+15}$
   (b) En déduire que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
2. Exprimer v_n en fonction de n, puis en déduire la limite de (v_n).
3. Exprimer u_n en fonction de v_n, puis en déduire la limite de (u_n).

Exercice 3. (2 points (1 bonus))

Donner l'exemple d'une suite :

1. qui diverge vers $+\infty$ sans être croissante.
2. qui diverge sans pour autant que sa limite soit $+\infty$ ou $-\infty$.

Nom : . . . . **Prénom :** . . . . Classe :. . . . . .

Interrogation n°5

On prendra soin de coller le sujet sur la copie. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et de l'application.

<u>Exercice</u> 1. R.O.C (4 points)

1. Montrer, par récurrence, que pour tout réel x positif et pour tout entier n, on a :

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

2. Soit (u_n) une suite définie par $u_n = q^n$ (avec $q > 0$).
   (a) En utilisant la première question (on posera $q = x+1$) montrer que u_n a pour limite $+\infty$ lorsque $q > 1$.
   (Hors Barème) Si $q \in]0;1[$, en posant $q' = \dfrac{1}{q} > 1$ démontrer que u_n converge ves 0

<u>Exercice</u> 2. (5 points)

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = \frac{8u_n+3}{u_n+6}$$

1. On pose, pour tout entier n, $v_n = \dfrac{u_n - 3}{u_n + 1}$.
   (a) Montrer que $v_{n+1} = \dfrac{5u_n - 15}{9u_n + 9}$
   (b) En déduire que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
2. Exprimer v_n en fonction de n, puis en déduire la limite de (v_n).
3. Exprimer u_n en fonction de v_n, puis en déduire la limite de (u_n).

<u>Exercice</u> 3. (2 points (1 bonus))

Donner l'exemple d'une suite :

1. qui diverge vers $-\infty$ sans être décroissante.
2. qui diverge sans pour autant que sa limite soit $+\infty$ ou $-\infty$.