

INTERROGATION FINALE

**Proposition 1 :**

1. Démontrer qu'un nombre complexe z est imaginaire pur si et seulement si $\bar{z} = -z$.
2. Démontrer qu'un nombre complexe z est réel si et seulement si $\bar{z} = z$.
3. Démontrer que pour tout nombre complexe z , on a l'égalité : $z\bar{z} = |z|^2$.

Exercice 1. Liban 3 juin 2010

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, et donner une justification de la réponse choisie.

Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Toutefois, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même nonfructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

1. Une urne contient une boule blanche et deux boules noires. On effectue 10 tirages successifs d'une boule avec remise (on tire une boule au hasard, on note sa couleur, on la remet dans l'urne et on recommence).

Proposition 1 : « La probabilité de tirer exactement 3 boules blanches est

$$3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^7 . »$$

2. Une variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda (\lambda > 0)$.

On rappelle que pour tout réel $a > 0$: $p(X \leq a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda t} dt$.

Proposition 2 : « Le réel a tel que $p(X > a) = p(X \leq a)$ est égal à $\frac{\ln 2}{\lambda}$. »

INTERROGATION FINALE

**Proposition 2 :**

Démontrer la formule d'intégration par parties en utilisant la formule de dérivation d'un produit de deux fonctions dérivables, à dérivées continues sur un intervalle $[a ; b]$.

Exercice 1. On suppose que la durée de vie T_1 (en heures) de chaque composant défectueux suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_1 = 5 \times 10^{-4}$ et que la durée de vie T_2 (en heures) de chaque composant non défectueux suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_2 = 10^{-4}$ (on pourra se reporter au formulaire ci-dessous).

1. Calculer la probabilité que la durée de vie d'un composant soit supérieure à 1000 heures :
 - (a) si ce composant est défectueux ;
 - (b) si ce composant n'est pas défectueux. Donner une valeur approchée de ces probabilités 10^{-2} près.
2. Soit T la durée de vie (en heures) d'un composant acheté au hasard.
Démontrer que la probabilité que ce composant soit encore en état de marche après t heures de fonctionnement est :

$$P(T \geq t) = 0,02e^{-5 \times 10^{-4}t} + 0,98e^{-10^{-4}t} .$$

(on rappelle que la probabilité qu'un composant vendu dans le magasin soit défectueux est égale à 0,02).

3. Sachant que le composant acheté est encore en état de fonctionner 1000 heures après son installation, quelle est la probabilité que ce composant soit défectueux ?
Donner une valeur approchée de cette probabilité à 10^{-2} près.