Nom : .... **Prénom :** .... Classe :......

INTERROGATION N°15

Exercice 1. R.O.C (6 points)

Partie A

Démontrer la formule d'intégration par parties en utilisant la formule de dérivation d'un produit de deux fonctions dérivables, à dérivées continues sur un intervalle $[a\ ;\ b]$.

Partie B : Application

Soient les deux intégrales définies par

$$\mathrm{I} = \int_0^{\pi} e^x \sin x \, \mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad \mathrm{J} = \int_0^{\pi} e^x \cos x \, \mathrm{d}x.$$

1. En utilisant l'intégration par parties de deux manières différentes, démontrer que $\mathrm{I} = -\mathrm{J}$ puis que $\mathrm{I} = \mathrm{J} + e^{\pi} + 1$.
2. En déduire les valeurs exactes de I et de J.

Exercice 2. (4 points)

Soit f et g deux fonctions définies, pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -x^2 + 2 \qquad \text{et} \qquad g(x) = x^2 - 2x - 2$$

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentant respectivement f et g dans un repère $(\mathrm{O}; \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé du plan d'unité 3 cm.

1. Montrer que $\mathscr{C}_f$ est au dessus de $\mathscr{C}_g$ sur $[-1; 2]$.
2. Calculer l'aire $\mathscr{A}$ (en cm^2) du domaine délimité par les courbes $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 2$.

Nom : .... **Prénom :** .... Classe :......

INTERROGATION N°15

Exercice 1. R.O.C (4 points)

On supposera connus les résultats suivants :

Soient u et v deux fonctions continues sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ avec $a < b$.

- Si $u \geqslant 0$ sur $[a\ ;\ b]$ alors $\displaystyle\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.
- Pour tous réels α et β, $\displaystyle\int_a^b [\alpha u(x) + \beta v(x)]\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b v(x)\,\mathrm{d}x$.

Démontrer que si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ avec $a < b$ et si, pour tout x de $[a\ ;\ b]$, $f(x) \leqslant g(x)$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 2. (6 points)

1. Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2}$$
   (a) Démontrer que F définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{F}(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f.

   (b) En déduire :
$$\int_0^1 \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2} dx$$
2. (a) Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, pour $x \in \mathbb{R}$ l'expression :
$$\mathrm{F}(x) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} t \sin t \, dt$$
   (b) En déduire la primitive de la fonction $x \longmapsto x \sin x$ s'annulant en $\dfrac{\pi}{2}$
3. Calculer l'aire du domaine délimité par les courbes $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ représentant f et g et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$ sachant que
$$f(x) = x \qquad \text{et} \qquad g(x) = x^2$$