Nom : …………… **Prénom :** …………… Classe :……

INTERROGATION N°14

Exercice 1. R.O.C (6 points)

Partie A

Démontrer la formule d'intégration par parties en utilisant la formule de dérivation d'un produit de deux fonctions dérivables, à dérivées continues sur un intervalle $[a\,;\,b]$.

Partie B : Application

Soient les deux intégrales définies par

$$\mathrm{I} = \int_0^{\pi} e^x \sin x \,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad \mathrm{J} = \int_0^{\pi} e^x \cos x \,\mathrm{d}x.$$

1. En utilisant l'intégration par parties de deux manières différentes, démontrer que $\mathrm{I} = -\mathrm{J}$ puis que $\mathrm{I} = \mathrm{J} + e^{\pi} + 1$.
2. En déduire les valeurs exactes de I et de J.

Exercice 2. (4 points)

1. Déterminer une primitive F pour chacune des fonctions f définies sur I par :

   (a) $f(x) = e^x - x^2$ sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}$ (b) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}^{+*}$

2. En déduire :

$$\int_0^1 e^x - x^2 dx \qquad \text{et} \qquad \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$$

Nom : …………… **Prénom :** …………… Classe :……

INTERROGATION N°14

Exercice 1. R.O.C (3 points)

On supposera connus les résultats suivants :

Soient u et v deux fonctions continues sur un intervalle $[a\,;\,b]$ avec $a < b$.

- Si $u \geqslant 0$ sur $[a\,;\,b]$ alors $\displaystyle\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.
- Pour tous réels α et β, $\displaystyle\int_a^b [\alpha u(x) + \beta v(x)]\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b v(x)\,\mathrm{d}x$.

Démontrer que si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a\,;\,b]$ avec $a < b$ et si, pour tout x de $[a\,;\,b]$, $f(x) \leqslant g(x)$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 2. (7 points)

1. Déterminer une primitive F pour chacune des fonctions f définies sur I par :

   (a) $f(x) = e^x - x$ sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}$ (b) $f(x) = (1+x)^2$ sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}$

2. En déduire :

$$\int_0^1 e^x - x dx \qquad \text{et} \qquad \int_1^e (1+x)^2 dx$$

3. On note $g(x) = e^x$ et $h(x) = x$. Déduire de la précédente question l'aire du domaine délimité par les courbes des fonctions g et h et par les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.
4. Déterminer, en intégrant par parties, les deux intégrales suivantes :

$$\mathrm{I} = \int_1^e \ln x dx \qquad \text{et} \qquad \mathrm{J} = \int_0^3 te^t dt$$