Nom : .... **Prénom :** .... Classe :......

INTERROGATION N°13

Exercice 1. R.O.C (4 points)

Soit a et b deux réels tels que $a < b$ et f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a\,;\,b]$. On suppose connus les résultats suivants :

- $\displaystyle\int_a^b [f(t)+g(t)]\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$
- Si pour tout $t \in [a\,;\,b]$, $f(t) \geqslant 0$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0.$

Montrer que : si pour tout $t \in [a\,;\,b]$, $f(t) \leqslant g(t)$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$

Exercice 2. R.O.C again (6 points)

Dans cet exercice, on demande aux candidats d'établir, en suivant la démarche proposée, deux résultats de cours.

On rappelle que la fonction ln est définie et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$, positive sur $[1\,;\,+\infty[$, et vérifie :

$$\begin{cases} \ln 1 = 0 \\ \text{Pour tous réels strictement positifs } x \text{ et } y,\ \ln(xy) = \ln x + \ln y \\ \text{Pour tout réel strictement positif} x,\ [\ln(x)]' = \dfrac{1}{x} \\ \ln(2) \approx 0,69 \text{ à } 10^{-2} \text{ près} \end{cases}$$

1. On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \sqrt{x} - \ln x.$$

   (a) Etudier les variations de f et en déduire que f admet un minimum sur $]0\,;\,+\infty[$.

   (b) En déduire le signe de f puis que, pour tout $x > 1$, $0 < \dfrac{\ln x}{x} < \dfrac{\sqrt{x}}{x}$.

   (c) En déduire que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

2. Soit n un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{\ln x}{x^{\frac{1}{n}}}.$$

   En utilisant la question 1., déterminer, si elle existe, la limite en $+\infty$ de la fonction f_n.

On posera $\mathrm{X} = x^{\frac{1}{n}}$ et on en déduire que $\ln \mathrm{X} = \dfrac{\ln x}{n}$

Nom : .... **Prénom :** .... Classe :......

INTERROGATION N°13

<u>Exercice</u> 1. R.O.C (4 points)

On supposera connus les résultats suivants :

Soient u et v deux fonctions continues sur un intervalle $[a\,;\,b]$ avec $a < b$.

- Si $u \geqslant 0$ sur $[a\,;\,b]$ alors $\displaystyle\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.
- Pour tous réels α et β, $\displaystyle\int_a^b [\alpha u(x) + \beta v(x)]\,\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x + \beta\int_a^b v(x)\,\mathrm{d}x$.

Démontrer que si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a\,;\,b]$ avec $a < b$ et si,
pour tout x de $[a\,;\,b]$, $f(x) \leqslant g(x)$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

<u>Exercice</u> 2. (6 points)

On considère l'équation notée (E) : $\ln x = -x$.

1. On considère la fonction f défmie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = x + \ln x$.
   (a) Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   (b) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution notée α appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   (c) Vérifier que : $\dfrac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant 1$.
2. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{4x - \ln x}{5}$.
   (a) Etudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   (b) En déduire que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}\,;\,1\right]$, $g(x)$ appartient à cet intervalle.
   (c) Démontrer qu'un nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ est solution de l'équation (E) si et seulement si $g(x) = x$.