BACCALAUREAT GENERAL GRIS CLAIR-Corrigé

SESSION 2011

MATHEMATIQUES-NON SPECIALISTE

Série : **S**

DUREE DE L'EPREUVE : **4 Heures**. COEFFICIENT : **7**.

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5.

L'utilisation de la calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter tous les exercices.

Il est invité à faire sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développé. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

BAC GRIS CLAIR

Exercice 1. (5 points)

Cet exercice contient une restitution organisée de connaissances.

Partie A

On suppose connus les résultats suivants :

1. Dans le plan complexe, on donne par leurs affixes z_A, z_B et z_C trois points A, B et C.
   Alors $\left|\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right| = \dfrac{CB}{CA}$ et $\arg\left(\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = \left(\overrightarrow{CA},\ \overrightarrow{CB}\right) \quad (2\pi)$.
2. Soit z un nombre complexe et soit θ un réel :
   $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ si et seulement si $|z| = 1$ et $\arg(z) = \theta + 2k\pi$, où k est un entier relatif.

On a : $\Omega M = \Omega M' \Longleftrightarrow \dfrac{\Omega M}{\Omega M'} = 1 \Longleftrightarrow \dfrac{|z' - \omega|}{|z - \omega|} = 1$

De plus $\arg\left(\dfrac{z' - \omega}{z - \omega}\right) = \left(\overrightarrow{\Omega M'},\ \overrightarrow{\Omega M}\right) \quad (2\pi)$, par conséquent le nombre complexe $\dfrac{z' - \omega}{z - \omega}$ a pour module 1 et pour argument θ, on peut donc écrire, en utilisant la forme exponentielle, que :

$$\frac{z' - \omega}{z - \omega} = e^{i\theta}$$

On en déduit alors que : $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$

Partie B

Dans un repère orthonormal direct du plan complexe $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 2 cm, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives

$$z_A = -\sqrt{3} - \mathrm{i},\ z_B = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3},\ z_C = \sqrt{3} + \mathrm{i} \text{ et } z_D = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}.$$

1. (a)

$$|z_A| = \sqrt{3+1} = 2$$
$$|z_B| = \sqrt{1+3} = 2$$
$$|z_C| = \sqrt{3+1} = 2$$
$$|z_D| = \sqrt{1+3} = 2$$

Ainsi :

$$z_A = r(\cos\theta + i\sin\theta) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = 2e^{-i\frac{5\pi}{6}}$$

Le module de z_A est donc 2 et un argument de z_A est $-\dfrac{5\pi}{6}$.

$$z_B = r(\cos\theta + i\sin\theta) = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2}\right) = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

Le module de z_B est donc 2 et un argument de z_B est $-\dfrac{\pi}{3}$.

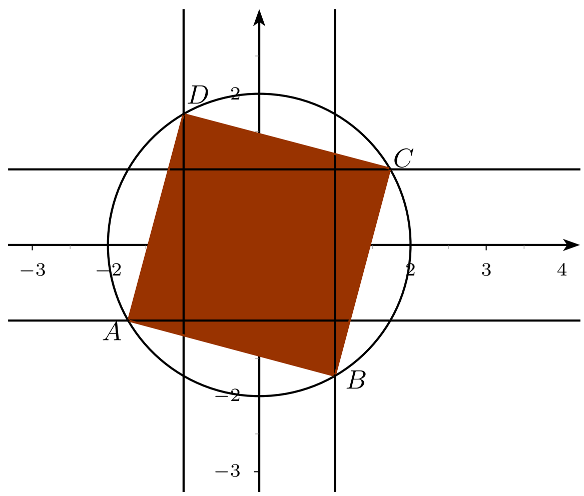
$$z_C = r(\cos\theta + i\sin\theta) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$$

Le module de z_C est donc 2 et un argument de z_C est $\dfrac{\pi}{6}$.

$$z_D = r(\cos\theta + i\sin\theta) = 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

Le module de z_D est donc 2 et un argument de z_D est $\dfrac{2\pi}{3}$.

(b) On trace le cercle, disons $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 2. A est alors le point d'intersection de $\mathscr{C}$ avec la droite d'équation $y = -1$ situé dans le quart de plan d'abscisse et d'ordonnée négatives.
B est le point d'intersection de $\mathscr{C}$ avec la droite d'équation $x = 1$ situé dans le quart de plan d'abscisse positive et d'ordonnée négative.
C est le point d'intersection de $\mathscr{C}$ avec la droite d'équation $y = 1$ situé dans le quart de plan d'abscisse et d'ordonnée positives.
D enfin est le point d'intersection de $\mathscr{C}$ avec la droite d'équation $x = -1$ situé dans le quart de plan d'abscisse négative et d'ordonnée positive.



(c) Considérons la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, alors l'image du point A noté A' est :

$$z_{A'} = iz_A = -\sqrt{3}i + 1 = z_B$$

De même

$$z_{B'} = iz_B = i + \sqrt{3} = z_C$$

et

$$z_{C'} = iz_C = z_D$$

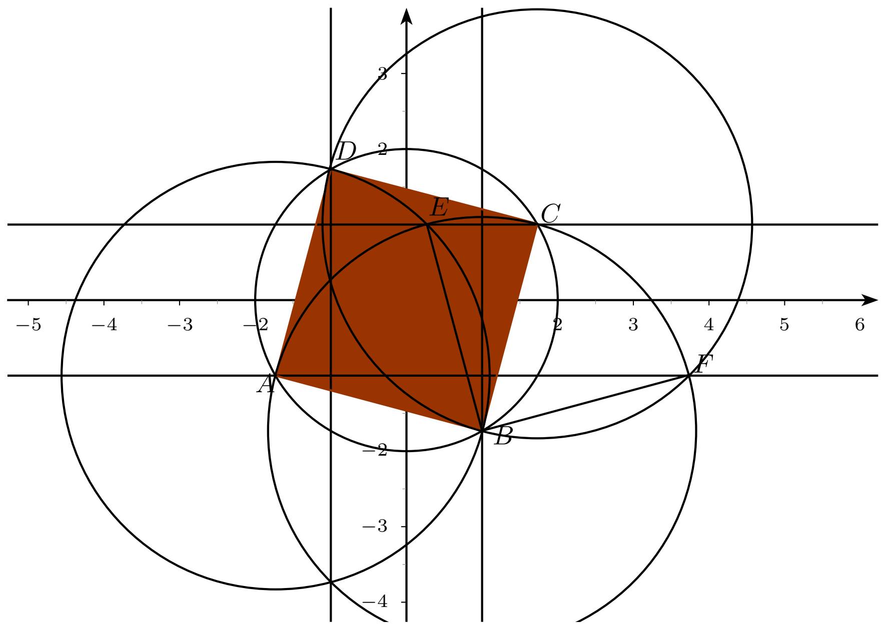
ainsi que

$$z_{D'} = iz_D = z_A$$

Par conséquent les diagonales de ce quadrilatère sont perpendiculaires et se coupent en leurs milieux et ont aussi la même longueur, $ABCD$ est donc un carré.

2. On considère la rotation r de centre B et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$. Soient E et F les points du plan définis par : $E = r(A)$ et $F = r(C)$.

(a) On construit les cercles de centre A et de rayon AB et de centre B et de rayon AB, le point d'intersection de ces deux cercles à l'intérieur du carré $ABCD$ est le point E.
On construit les cercles de centre B et de rayon BC et de centre C et de rayon BC, le point d'intersection de ces deux cercles à l'extérieur du carré $ABCD$ est le point F.



(b) Donner l'écriture complexe de r est donné par :

$$z' - z_B = e^{-i\frac{\pi}{2}}(z - z_B)$$

(c)

$$z_E - z_B = e^{-i\frac{\pi}{3}}(z_A - z_B) \Longleftrightarrow z_E = e^{-i\frac{\pi}{3}}(z_A - z_B) + z_B = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\sqrt{3} - i - 1 + i\sqrt{3}\right) + 1 - i\sqrt{3}$$

Après calcul on trouve

$$z_E = -\sqrt{3} + 2 + i$$

<u>Exercice</u> 2. (5 points)

Soit φ la fonction définie sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$ par

$$\varphi(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x.$$

1. (a)

$$\varphi'(x) = 2x - 4x\ln x - 2x^2 \times \frac{1}{x} = 2x - 4x\ln x - 2x = -4x\ln x$$

Comme $x \geq 1$, $\ln x \geq 0$ et donc

$$\varphi'(x) \leq 0$$

On en déduit que φ est strictement décroissante sur $[1; +\infty[$.

(b)

$$\varphi(e) = 1 + e^2 - 2e^2 \ln e = 1 + e^2 - 2e^2 = 1 - e^2 < 0$$

On a $\varphi(1) = 1 + 1 = 2 > 0$, la fonction φ est continue sur $[1; e]$ (puisque dérivable) et strictement décroissante, par conséquent d'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution dans $[1; e]$.
On trouve (à l'aide de la calculatrice) que $1,8 < \alpha < 1,9$

(c) La fonction φ est strictement décroissante, par conséquent :

x	1		α		$+\infty$
$\varphi(x)$		$+$	0	$-$	

2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}.$$

On note f' la fonction dérivée de f.

(a) Pour tout $x \geq 1$ on a :

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(1+x^2) - 2x\ln x}{(1+x^2)^2} = \frac{\frac{1}{x}(1+x^2-2x^2\ln x}{(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2-2x^2\ln x}{x(1+x^2)^2} = \frac{\varphi(x)}{x(1+x^2)^2}$$

(b) Compte tenu de l'expression de $f'(x)$ et de la positivité de son dénominateur, $f'(x)$ et $\varphi(x)$ ont le même signe, par conséquent :

x	1		α		$+\infty$
$\varphi(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

(c) On a pour tout $x \geq 1$:

$$1+x^2 \geq x^2 \iff 0 \leq \frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{x^2} \iff 0 \leq f(x) \leq \frac{\ln x}{x^2}$$

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{\ln x}{x^2}.$$

(d) On sait que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$$

D'après le théorème des gendarmes et d'après la question précédente on a :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

3. (a)

$$\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x}\times\ln x\right]_1^e - \int_1^e -\frac{1}{x}\times\frac{1}{x}dx = -\frac{1}{e} + \int_1^e \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{e} + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^e = -\frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1 = -\frac{2}{e} + 1$$

(b) On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f, dans un repère orthonormé $(0;\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 1 cm. Soit $\mathscr{A}$ l'aire exprimée en cm^2 du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$.

D'après une question passée on a, pour tout $x \in [1; e]$:

$$0 \leq f(x) \leq \frac{\ln x}{x^2}$$

Par conséquent :

$$0 \leq \int_1^e f(x)dx \leq \int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx = 1 - \frac{2}{e}$$

Ainsi :

$$0 \quad \text{cm}^2 \leq \mathscr{A} \leq 1 - \frac{2}{e} \quad \text{cm}^2$$

Exercice 3. (5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{9}{2}\mathrm{e}^{-2x} - 3\mathrm{e}^{-3x}.$$

Partie A :
Soit l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = 3\mathrm{e}^{-3x}$.

1. L'équation différentielle (E') admet une infinité de solutions z de la forme

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad z(t) = Ke^{-2t} \qquad \text{avec } K \in \mathbb{R}$$

2. Effectivement on en déduit que h est solution de (E') avec $k = \frac{9}{2}$.
3.
$$g'(x) = 9e^{-3x}$$

D'où

$$g'(x) + 2g(x) = 9e^{-3x} - 6e^{-3x} = 3e^{-3x}$$

Donc g est bien solution de (E).

4. On a bien $f = g + h$, par conséquent on a :

$$f' + 2f = g' + h' + 2g + 2h = g' + 2g + h' + 2h$$

Or, $g' + 2g = 0$ et $h'(x) + 2h(x) = 3e^{-3x}$, d'où :

$$f'(x) + 2f(x) = 0 + 3e^{-3x}$$

Et donc f est bien solution de (E).

Partie B :
On nomme $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ d'unité 1 cm.

1. On a, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$3\mathrm{e}^{-2x}\left(\frac{3}{2} - \mathrm{e}^{-x}\right) = \frac{9}{2}e^{-2x} - 3e^{-2x-x} = f(x)$$

2.
$$\lim_{x\to+\infty} e^{-2x} = \lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$$

Donc

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

De même on a :

$$\lim_{x\to-\infty} e^{-2x} = \lim_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$$

Donc

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \times -\infty = -\infty$$

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$f'(x) = -9e^{-2x} + 9e^{-3x} = 9e^{-2x}(e^{-x} - 1)$$

Ce qui est du signe de $e^{-x} - 1$ étant donné que $9e^{-2x} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Or,

$$e^{-x} - 1 \geq 0 \iff e^{-x} \geq 1 \iff -x \geq \ln 1 = 0 \iff x \leq 0$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	0

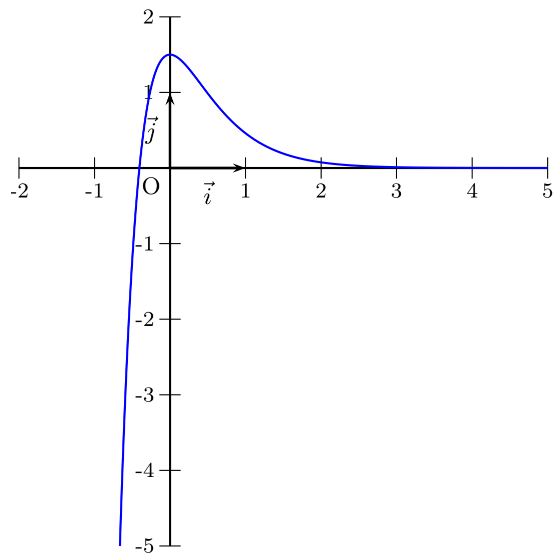
4.
$$f(0) = 4,5 - 3 = 1,5 = \frac{3}{2}$$

Ainsi le point $A(0;1,5)$ est le point d'intersection entre $\mathscr{C}_f$ et l'axe des ordonnées.
Résolvons $f(x)=0 \Longleftrightarrow 4,5e^{-2x}=3e^{-3x}$:

$$\begin{aligned}
& f(x)=0 \\
\Longleftrightarrow\quad & 3\mathrm{e}^{-2x}\left(\frac{3}{2}-\mathrm{e}^{-x}\right)=0 \\
\Longleftrightarrow\quad & 3e^{-2x}=0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{3}{2}-e^{-x}=0 \\
\Longleftrightarrow\quad & e^{-x}=\frac{3}{2} \\
\Longleftrightarrow\quad & -x=\ln 3-\ln 2 \\
\Longleftrightarrow\quad & x=\ln 2-\ln 3=\ln\frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Par conséquent le point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses a pour coordonnée $\left(\ln\frac{2}{3};0\right)$.

5. $f(1)=4,5e^{-2}-3e^{-3}$.



6. La fonction f est strictement positive sur $\mathbb{R}^+$ puisque $f(0)=1,5$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ et car elle est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$, donc :

$$\mathscr{A}=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 \frac{9}{2}\mathrm{e}^{-2x}-3\mathrm{e}^{-3x}dx=\left[-\frac{9}{4}e^{-2x}+e^{-3x}\right]_0^1=-\frac{9}{4e^2}+\frac{1}{e^3}+\frac{9}{4}-1 \quad \text{cm}^2$$

<u>Exercice</u> 4. (6 points)

L'objectif de l'exercice est l'étude d'une fonction et d'une suite liée à cette fonction

PARTIE A

On note f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}.$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$. L'unité graphique est 1 cm.

1. Etude des limites

   (a)
   $$f(x) = \frac{1}{x} \times \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}}$$
   Or on sait que $\lim_{x \to +\infty} x e^{x} = +\infty$, par conséquent :
   $$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \Longrightarrow \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to +\infty} x e^{x} = +\infty$$
   et donc
   $$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$$

   (b)
   $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \times e^{0} = 0 \times 1 = 0$$

   (c) $\mathscr{C}$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ et une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

2. Etude des variations de la fonction f

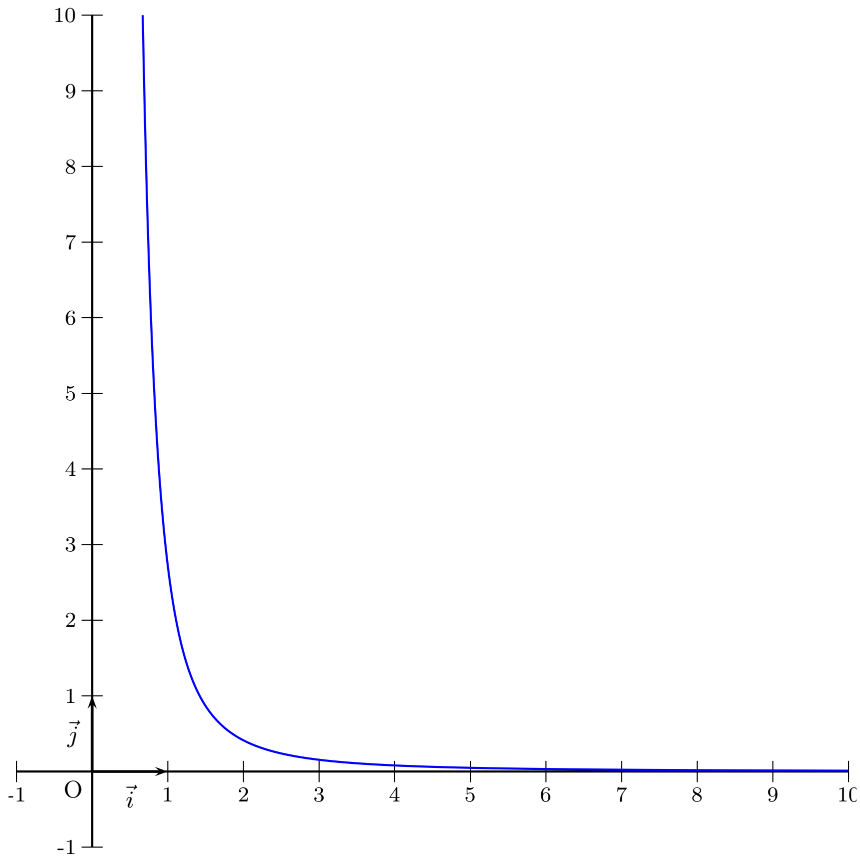
   (a)
   $$f'(x) = \frac{-2x}{x^4} e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^2} \times \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} = -\frac{1}{x^4} e^{\frac{1}{x}} (2x + 1)$$

   (b) Pour tout $x > 0$, on a $f'(x) < 0$ et donc :

x	0 $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$+\infty \searrow 0$

   (c) f est une fonction continue strictement décroissante sur $]0; +\infty[$ avec $+\infty$ pour limite eb 0 et 0 pour limite en $+\infty$, donc d'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α dans $]0; +\infty[$.

3.



PARTIE B : Etude d'une suite d'intégrales

Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$ on considère l'intégrale I_n définie par :

$$I_n = \int_1^2 \frac{1}{x^n}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x.$$

1. $\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$ est de la forme $-u'e^u$ donc une primitive de cette fonction aura la forme $-e^u$ d'où :
   $I_2 = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} = \left[-e^{\frac{1}{x}}\right]_1^2 = -e^{\frac{1}{2}} + e^1$
2. Une relation de récurrence
   (a)
   $$I_{n+1} = \int_1^2 \frac{1}{x^{n+1}}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{1}{x^{n-1}} \times \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx$$
   Posons $u'(x) = \dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$ et donc $u(x) = -e^{\frac{1}{x}}$, puis $v(x) = \dfrac{1}{x^{n-1}} = x^{-(n-1}$ et donc $v'(x) = \dfrac{-n+1}{x^n}$.
   On en déduit alors, par IPP, que :
   $$I_{n+1} = \left[-\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{n-1}}\right]_1^2 - (n-1)\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^n}dx = -\frac{e^{0,5}}{2^{n-1}} + e - (n-1)I_n = \mathrm{e} - \frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{2^{n-1}} + (1-n)I_n$$
   (b) $I_3 = \mathrm{e} - \dfrac{\sqrt{\mathrm{e}}}{2^{3-1}} + (1-3)I_3 = e - \dfrac{\sqrt{\mathrm{e}}}{4} - 2(-\sqrt{e}+e) = e - \dfrac{\sqrt{\mathrm{e}}}{4} + 2\sqrt{e} + 2e = 3e + \dfrac{7}{4}\sqrt{e}$
3. Etude de la limite de la suite de terme général I_n
   (a) Pour tout $x \in [1;2]$ on a :
   $$1 \leq x \leq 2 \Longleftrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{x} \leq 1 \Longleftrightarrow \sqrt{e} \leq e^{\frac{1}{x}} \leq e \Longleftrightarrow \frac{\sqrt{e}}{x^n} \leq \frac{1}{x^n}e^{\frac{1}{x}} \leq e \Longrightarrow 0 \leqslant \frac{1}{x^n}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \leqslant \frac{\mathrm{e}}{x^n}$$

(b) D'après la question précédente on a pour tout $x \in [1;2]$:

$$0 \leqslant \frac{1}{x^n}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \leqslant \frac{\mathrm{e}}{x^n} \iff 0 \leq \int_1^2 \frac{1}{x^n}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}dx \leq \int_1^2 \frac{e}{x^n}dx \iff 0 \leq I_n \leq \left[e\frac{x^{-n+1}}{-n+1}\right]_1^2 = e\frac{2^{-n+1}}{-n+1} - \frac{e}{-n+1}$$

Au final :

$$0 \leq I_n \leq \frac{e}{-n+1}\left(\frac{1}{2^{n-1}} - 1\right)$$

Enfin la limite de $\frac{1}{2^{n-1}}$ est 0 en $+\infty$, tout comme celle de $\frac{e}{-n+1}$, donc d'après le théorème des gendarmes la suite (I_n) converge vers 0.