CORRECTION BACCALAUREAT GENERAL BLEU

SESSION 2011

MATHEMATIQUES-SPECIALISTE et NON SPECIALISTE

Série : **S**

DUREE DE L'EPREUVE : **4 Heures**. COEFFICIENT : **7** ou **9**.

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5.

L'utilisation de la calculatrice est autorisée.

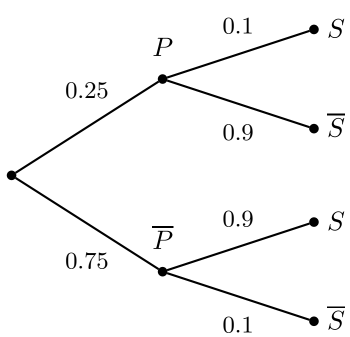
Le candidat doit traiter tous les exercices.

Il est invité à faire sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développé. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

CORRECTION DU BAC BLEU

Exercice 1. (3 points)

1. On désigne par A et B deux événements indépendants d'un univers muni d'une loi de probabilité p.
   On sait que $p(A \cup B) = \dfrac{4}{5}$ et $p\left(\overline{A}\right) = \dfrac{3}{5}$. Puisque A et B sont indépendants on a :
   $$P(A \cap B) = P(A)P(B) \Longrightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$$
   Or, $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \dfrac{3}{5} = \dfrac{2}{5}$, par conséquent :
   $$\frac{4}{5} = \frac{2}{5} + P(B) - \frac{2}{5}P(B) \Longleftrightarrow \frac{2}{5} = \frac{3}{5}P(B) \Longleftrightarrow P(B) = \frac{2}{3}$$
   réponse b.
2. On note X une variable aléatoire continue qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,04$.
   On rappelle que pour tout réel t positif, la probabilité de l'événement $(X \leqslant t)$, notée $p(X \leqslant t)$, est donnée par $p(X \leqslant t) = \displaystyle\int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\, \mathrm{d}x$.
   $$P(X > 5) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - \int_0^5 \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^5 = 1 + e^{-5\lambda} - 1 = e^{-5\lambda} = e^{-5\times 0,04}$$
3. Dans ma rue, il pleut un soir sur quatre.
   S'il pleut, je sors mon chien avec une probabilité égale à $\dfrac{1}{10}$; s'il ne pleut pas, je sors mon chien avec une probabilité égale à $\dfrac{9}{10}$. Notons P l'événement il pleut et S l'événement je sors mon chien, on a alors l'arbre suivant :



On cherche $P_S(P)$ (et non on cherche le contraire...) i.e on cherche $\dfrac{P(S \cap P)}{P(S)}$. Par conséquent :
$$P_S(P) = \frac{0,25 \times 0,1}{0,25 \times 0,1 + 0,75 \times 0,9} = \frac{1/40}{1/40 + 27/40} = \frac{1}{28}$$
En fait on cherche plutôt $P_S(\overline{P}) = \dfrac{27}{28}$
Réponse d.

Exercice 2. (5 points)

Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.

$(O;\vec{u},\vec{v})$ est un repère orthonormal direct du plan complexe.
Soit A le point d'affixe $1+\mathrm{i}$.
Au point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' telle que

$$z' = \frac{1}{2}\left(z + \mathrm{i}\overline{z}\right).$$

1. On pose $z = x + \mathrm{i}y$ et $z' = x' + \mathrm{i}y'$ avec x, y, x' et y' réels.
   (a)
   $$z' = x' + iy' = \frac{1}{2}(x+iy+i(x-iy)) = \frac{1}{2}(x+y+i(x+y)) = \frac{1}{2}(x+y) + \frac{1}{2}i(x+y)$$
   Ainsi on a $x' = \frac{1}{2}(x+y)$ et $y' = \frac{1}{2}(x+y)$. Le point M' a son ordonnée égale à son abscisse, par conséquent il est sur la droite d'équation $y = x$, droite qui passe trivialement par O et $A(1;1)$, ainsi $M' \in (OA)$.
   (b)
   $$\begin{aligned} & z' = z \\ \iff\ & \frac{1}{2}(z+i\overline{z}) = z \\ \iff\ & \frac{1}{2}(z+i\overline{z}-2z) = 0 \\ \iff\ & -z+i\overline{z} = 0 \\ \iff\ & z = i\overline{z} \\ \iff\ & x+iy = ix+y \\ \iff\ & x = y \end{aligned}$$
   Au final $M = M'$ si et seulement si $M \in (OA)$.
   (c) $\overrightarrow{MM'}\left(\frac{1}{2}(x+y)-x;\frac{1}{2}(x+y)-y\right) \iff \overrightarrow{MM'}\left(\frac{1}{2}(y-x);\frac{1}{2}(x-y)\right)$ et $\overrightarrow{OA}(1;1)$, ainsi :
   $$\overrightarrow{MM'}\cdot\overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}(y-x) + \frac{1}{2}(x-y) = 0 \iff \overrightarrow{MM'} \perp \overrightarrow{OA}$$
2. Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. M_1 est le point d'affixe z_1 image de M par r, M_2 le point d'affixe $z_2 = \overline{z}$, M_3 le point d'affixe z_3 tel que le quadrilatère $\mathrm{O}M_1M_3M_2$ soit un parallélogramme.
   (a) $z_{M_1} = iz = i(4+i) = 4i-1$, puis $z_{M_2} = \overline{z} = 4-i$ et enfin M_3 est l'image de M_2 par la translation de vecteur $\overrightarrow{OM_1}$ ainsi :
   $$z_{M_3} = z_{M_2} + z_{\overrightarrow{OM_1}} = z_{M_2} + z_{M_1} = 4-i+4i-1 = 3-3i$$
   (b) On a donc :
   $$z_1 = iz \qquad \text{et} \qquad z_2 = \overline{z} \qquad \text{et donc} \qquad z_3 = z_2 + z_1 = \overline{z} + iz$$
   (c) $OM_1M_3M_2$ est un losange si et seulement si $OM_1 = OM_2$.
   Or $OM_1 =\mid iz \mid=\mid z \mid$ et $OM_2 =\mid \overline{z} \mid=\mid z \mid= OM_1$, par conséquent le parallélogramme $OM_1M_3M_2$ a deux côtés consécutifs de même longueur, c'est donc un losange.
   (d)
   $$z' - z = \frac{1}{2}(z+i\overline{z}) - z = \frac{1}{2}(-z+i\overline{z}) = \frac{1}{2}i(iz+\overline{z}) = \frac{1}{2}iz_3$$
   On a donc $\mid z'-z \mid=\mid \frac{1}{2}iz_3 \mid\iff MM' = \frac{1}{2}\mid z_3 \mid\iff MM' = \frac{1}{2}\mathrm{O}M_3$. (Notons que $\mid i \mid= 1$).
3. Les points M, M_1, M_2 e tM_3 appartiennent à un même cercle de centre O si et seulement si $OM = OM_1 =$

$OM_2 = OM_3$. Or :

$$OM = \mid z \mid \qquad \text{et} \qquad OM_1 = \mid iz \mid = \mid z \mid = OM \qquad \text{et} \qquad OM_2 = \mid \overline{z} \mid = \mid z \mid = OM$$

Ainsi les points M, M_1, M_2 e tM_3 appartiennent à un même cercle de centre O si et seulement si $OM = OM_3 \Longleftrightarrow OM = 2MM' \Longleftrightarrow \dfrac{1}{2}OM = MM'$.

$M' \in (OA)$ et $(MM') \perp (OA)$ donc le triangle OMM' est rectangle en M', avec $MM' = \dfrac{1}{2}OM$, par conséquent :

$$\sin \widehat{M'OM} = \frac{MM'}{OM} = \frac{\frac{1}{2}OM}{OM} = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow \widehat{M'OM} = \frac{\pi}{6}$$

Exercice 2. (5 points)
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. (a) Si $a \equiv b \mod 7$ alors il existe un réel k tel que $a - b = 7k \Longleftrightarrow a = 7k + b$ et si $c \equiv d \mod 7$ alors il existe un réel k' tel que $c = 7k' + d$. On cherche à démontrer qu'il existe un réel k'' tel que $ac - bd = 7k''$. Or,
$$ac - bd = (7k + b)(7k' + d) - bd = 49kk' + 7kd + 7k'b + bd - bd = 7(7kk' + k + k')$$
Le réel k'' existe bien et vaut $k'' = 7kk' + k + k'$ et on a donc $ac \equiv bd \mod 7$.
   (b) Notons, si $a \equiv b \mod 7$, $\mathscr{P}(n)$ la propriété $a^n \equiv b^n \mod 7$.
   – *Initialisation* : Pour $n = 1$ la propriété est trivialement vraie.
   – *Hérédité* : Supposons $\mathscr{P}$ vraie pour un certain n et montrons que $\mathscr{P}$ est vraie au rang $n + 1$. On a donc $a \equiv b \mod 7$ et $a^n \equiv b^n \mod 7$. En appliquant la première question, on obtient :
$$a^n \times a \equiv b^n \times b \mod 7 \Longleftrightarrow a^{n+1} \equiv b^{n+1} \mod 7$$
2. On a $2^3 \equiv 1 \mod 7$ et comme $3^6 - 1 = 728 = 7 \times 104$ $3^6 \equiv 1 \mod 7$.
3. Soit a un entier naturel non divisible par 7.
   (a) Si a n'est pas un multiple de 7 alors il y a 6 restes possibles dans la division euclidienne de a par 7. Examinons chacun des cas :
   i. $a \equiv 1 \mod 7 \Longrightarrow a^6 \equiv 1^6 \mod 7 \Longrightarrow a^6 \equiv 1 \mod 7$
   ii. $a \equiv 2 \mod 7 \Longrightarrow a^6 \equiv 2^6 \mod 7 \Longrightarrow a^6 \equiv 64 \mod 7 \Longrightarrow a^6 \equiv 1 \mod 7$
   iii. $a \equiv 3 \mod 7 \Longrightarrow a^2 \equiv 3^2 \mod 7 \Longrightarrow a^2 \equiv 2 \mod 7 \Longrightarrow a^6 \equiv 2^3 \mod 7 \Longrightarrow a^6 \equiv 8 \mod 7 \Longrightarrow a^6 \equiv 1 \mod 7$
   iv. $a \equiv 4 \mod 7 \Longrightarrow a^2 \equiv 4^2 \mod 7 \Longrightarrow a^2 \equiv 2 \mod 7 \Longrightarrow a^6 \equiv 2^3 \mod 7 \Longrightarrow a^6 \equiv 8 \mod 7 \Longrightarrow a^6 \equiv 1 \mod 7$
   v. $a \equiv 5 \mod 7 \Longrightarrow a^2 \equiv 5^2 \mod 7 \Longrightarrow a^2 \equiv 4 \mod 7 \Longrightarrow a^6 \equiv 4^3 \mod 7 \Longrightarrow a^6 \equiv 64 \mod 7 \Longrightarrow a^6 \equiv 1 \mod 7$

   CQFD.
   (b) On appelle *ordre* de $a \mod 7$, et on désigne par k, le plus petit entier naturel non nul tel que $a^k \equiv 1 \mod 7$. On a $a^k \equiv 1 \mod 7$ et, comme on suppose que a n'est pas divisible par 7 on a $a^6 \equiv 1 \mod 7$, de plus il existe un réel q et un réel tel que : $6 = kq + r$, au final on a
$$\begin{aligned} & a^k \equiv 1 \mod 7 \\ \Longrightarrow\ & a^{kq} \equiv 1 \mod 7 \\ \Longrightarrow\ & a^{kq+r} \equiv a^r \mod 7 \\ \Longrightarrow\ & a^6 \equiv a^r \mod 7 \\ \Longrightarrow\ & a^r \equiv 1 \mod 7 \end{aligned}$$
   Or, $r < k$ donc $r = 0$, par conséquent k divise 6 et donc k vaut 1, 2, 3 ou 6.
   (c) Si $a = 2$, alors $a \equiv 2 \mod 7$ et $a^2 \equiv 4 \mod 7$ puis $a^3 \equiv 1 \mod 7$, ainsi 2 a pour ordre (modulo 7) 3.
   Si $a = 3$ alors $a^2 \equiv 2 \mod 7 \Longrightarrow a^3 \equiv 6 \mod 7$, ainsi 3 a pour ordre (modulo 7) 6.
   Si $a = 4$ alors $a^2 \equiv 2 \mod 7$ donc $a^3 \equiv 1 \mod 7$ et donc 4 a pour ordre (modulo 7) 3.
   Si $a = 5$ alors $a^2 \equiv 4 \mod 7$ donc $a^3 \equiv 20 \mod 7$ i.e $a^3 \equiv -1 \mod 7$ et donc 5 a pour ordre 6.
   Enfin si $a = 6$ alors $a^2 \equiv 36 \mod 7$ i.e $a^2 \equiv 1 \mod 7$ et donc 6 a pour ordre (modulo 7) 2.
4. A tout entier naturel n, on associe le nombre
$$A_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n.$$
L'ordre de 2 est 3, de plus $2006 = 3 \times 668 + 2$, par conséquent $2^{2006} \equiv 2^{2\times668+2} \mod 7 \Longrightarrow 2^{2006} \equiv 4 \mod 7$.
L'ordre de 3 est 6, de plus $2006 = 6 \times 334 + 2$, par conséquent $3^{2006} \equiv 3^{6\times334+2} \mod 7 \Longrightarrow 3^{2006} \equiv 2 \mod 7$.
L'ordre de 4 est 3, de plus $2006 = 3 \times 668 + 2$, par conséquent $4^{2006} \equiv 4^{3\times668+2} \mod 7 \Longrightarrow 4^{2006} \equiv 2 \mod 7$.
L'ordre de 5 est 6, de plus $2006 = 6 \times 334 + 2$, par conséquent $5^{2006} \equiv 5^{6\times334+2} \mod 7 \Longrightarrow 5^{2006} \equiv 4 \mod 7$.
L'ordre de 6 est 2, de plus $2006 = 2 \times 1003$, par conséquent $6^{2006} \equiv 6^{2\times1003} \mod 7 \Longrightarrow 6^{2006} \equiv 1 \mod 7$.
Au final $A_{2006} \equiv 4 + 2 + 2 + 4 + 1 \mod 7 \Longrightarrow A_{2006} \equiv 13 \mod 7 \Longrightarrow A_{2006} \equiv 6 \mod 7$

Exercice 3. (4 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthononnal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points $A(1;2;3)$, $B(0;1;4)$, $C(-1\ ;\ -3\ ;\ 2)$, $D(4\ ;\ -2\ ;\ 5)$ et le vecteur $\overrightarrow{n}\,(2\ ;\ -1\ ;\ 1)$.

1. (a) $\overrightarrow{AB}(-1;-1;1)$ et $\overrightarrow{AC}(-2;-5;-1)$.
   $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ n'ont pas leurs coordonnées proportionnelles, en effet pour passer de -1 à -2 on multiplie par 2 tandis que pour passer de 1 à -1 on multiplie par -1, par conséquent $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et donc A, B et C ne sont pas alignés.

   (b) Compte tenu de la question précédente les points A, B et C forment un plan. De plus :

   $$\overrightarrow{AC}\cdot\vec{n} = -2\times 2 + 1\times 5 - 1 = -5+5 = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{AC}\perp\vec{n}$$

   et

   $$\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n} = -2+1+1 = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{AB}\perp\vec{n}$$

   $\vec{n}$ est normal à deux vecteurs non colinéaires qui dirige le plan (ABC) donc $\vec{n}$ est normal à (ABC).

   (c) Compte tenu de la question précédente une équation de (ABC) a pour forme :

   $$2x - y + z + d = 0$$

   Comme $A\in(ABC)$ alors $2\times 1 - 2 + 3 = -d \Longrightarrow d = -3$ d'où :

   $$(ABC) : 2x - y + z - 3 = 0$$

2. Soit (Δ) la droite dont une représentation paramétrique est :

   $$\begin{cases} x &= 2-2t \\ y &= -1+t \\ z &= 4-t \end{cases} \qquad \text{avec} t\in\mathbb{R}$$

   Les coordonnées de D vérifient-elles les équations de (Δ) :

   $$\begin{cases} 4 &= 2-2t \\ -2 &= -1+t \\ 5 &= 4-t \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2t &= -2 \\ t &= -1 \\ t &= -1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} t &= -1 \\ t &= -1 \\ t &= -1 \end{cases}$$

   donc $D\in(\Delta)$. $\vec{m}(-2;1;-1)$ dirige (Δ) et $\vec{m} = -\vec{n}$ donc $\vec{m}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires, $\vec{n}$ étant normal à (ABC), $\vec{}$ l'est aussi, et donc (Δ) est perpendiculaire à (ABC).

3. Soit E le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC). D'après la question précédente, $E\in(ABC)\cap(\Delta)$, par conséquent :

   $$2x_E - y_E + z_E - 3 = 0 \qquad \text{et} \begin{cases} x_E &= 2-2t \\ y_E &= -1+t \\ z_E &= 4-t \end{cases}$$

   donc $2(2-2t)-(-1+t)+4-t-3=0 \Longleftrightarrow 4-4t+1-t+4-t-3=0 \Longleftrightarrow 6-6t=0 \Longleftrightarrow t=1$, et donc :

   $$\begin{cases} x_E &= 2-2=0 \\ y_E &= -1+1=0 \\ z_E &= 4-1=3 \end{cases} \Longleftrightarrow E(0;0;3)$$

   De plus si on note G le centre de gravité du triangle ABC, G est l'isobarycentre de A, B et C et G a pour coordonnées :

   $$G\left(\frac{1+0-1}{3};\frac{2+1-3}{3};\frac{3+4+2}{3}\right) \Longleftrightarrow G(0;0;3) \Longleftrightarrow G = E$$

Exercice 4. (8 points)

1. Pour tout entier naturel n non nul, on considère la fonction f_n définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \ln x + \frac{x}{n} - 1.$$

   (a) On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{n} = +\infty$ donc

$$\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$$

   De plus $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{n} = 0$ donc

$$\lim_{x\to 0} f_n(x) = -\infty$$

   Puis, $f_n'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{n}$ et

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{n} \geq 0 \iff \frac{1}{x} \geq -\frac{1}{n} \iff n \geq -x \iff -n \leq x \iff x \geq -n$$

   Or, $-n < 0$ et $x \geq 0$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f_n'(x) \geq 0$ donc f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.

   (b) f_n est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, de plus $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} f_n(x) = -\infty$ donc d'après une conséquence du théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0; +\infty[$.
   De plus $f_n(1) = \ln 1 + \frac{1}{n} - 1 = \frac{1}{n} - 1$.
   Comme $n \geq 1$, alors on a $0 \leq \frac{1}{n} \leq 1 \Longrightarrow -1 + \frac{1}{n} \leq 0 \Longrightarrow 1 \leq \alpha_n$.
   De même, $f_n(e) = \ln e + \frac{e}{n} - 1 = \frac{e}{n} > 0 \Longrightarrow \alpha_n < e$. On a donc bien $\alpha_n \in [1; e]$.

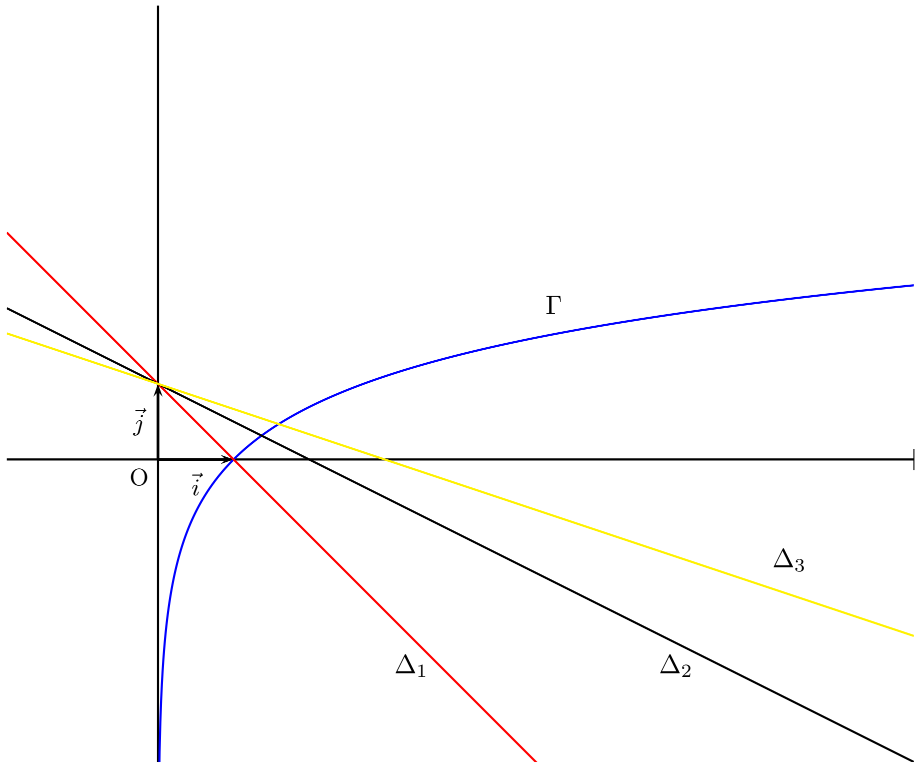
2. Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On note (Γ) la courbe représentative de la fonction logarithme népérien.

   (a) Le coefficient directeur de Δ_n vaut

$$\frac{-1}{n}$$

   D'où $\Delta_n : y = -\frac{1}{n}x + b$ et comme $A \in \Delta \Longrightarrow 1 = b$
   Au final : $\Delta_n : y = -\frac{1}{n}x + 1$

   (b)



(c) En notant $M(x;y)$ intersection de Γ et de Δ_n on a : $y = \ln x$ et $y = -\frac{1}{n}x + 1$ d'où :

$$\begin{aligned} & \ln x = -\frac{1}{n}x + 1 \\ \Longleftrightarrow \quad & \ln x + \frac{1}{n}x - 1 = 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & f_n(x) = 0 \end{aligned}$$

D'après la question 1.(b) $x = \alpha_n$, CQFD.

(d) α_1 vérifie $\ln x + x - 1 = 0 \Longleftrightarrow \ln x = 1 - x \Longleftrightarrow x = 1$, ainsi $\alpha_1 = 1$.
A l'aide de notre fameux croquis, il paraît judicieux de conjecturer que la suite (α_n) est croissante.

3. (a) On a :

$$\ln(\alpha_n) + \frac{\alpha_n}{n} - 1 = 0 \Longleftrightarrow \ln(\alpha_n) = -\frac{\alpha_n}{n} + 1$$

(b)

$$f_{n+1}(\alpha_n) = \ln(\alpha_n) + \frac{\alpha_n}{n+1} - 1 = -\frac{\alpha_n}{n} + 1 + \frac{\alpha_n}{n+1} - 1 = -\frac{\alpha_n}{n} + \frac{\alpha_n}{n+1} = \frac{-\alpha_n(n+1) + n\alpha_n}{n(n+1)} = -\frac{\alpha_n}{n(n+1)}$$

On a $n(n+1) > 0$, puis $\alpha_n \in [1; e]$ donc $\alpha_n > 0$ et par conséquent $f_{n+1}(\alpha_n) < 0$

(c) On a $f_{n+1}(\alpha_{n+1} = 0$ et $f_{n+1}(\alpha_n) < 0$ i.e comme f_{n+1} est une fonction croissante :

$$f_{n+1}(\alpha_n) < f_{n+1}(\alpha_{n+1} \Longleftrightarrow \alpha_n < \alpha_{n+1}$$

Ainsi la suite (α_n) est croissante.

(d) La suite (α_n) est croissante et majorée par e, donc convergente vers un réel ℓ. Or, $\ln(\alpha_n) = -\frac{\alpha_n}{n} + 1$ et $\lim_{n\to+\infty} \ln(\alpha_n) = \ln \ell$, puis $\lim_{n\to+\infty} -\frac{\alpha_n}{n} + 1 = 1$, par conséquent :

$$\ln \ell = 1 \Longleftrightarrow \ell = e$$

4. On désigne par $\mathcal{D}_n$ le domaine délimité par la courbe (Γ), l'axe des abscisses et les droites d'équation : $x = \alpha_n$ et $x = \mathrm{e}$.

   (a) Comme $\alpha_n > 1$, $\ln(\alpha_n) > 0$ donc l'aire du domaine $\mathcal{D}_\backslash$ noté $\mathscr{A}$ vaut :

   $$\mathscr{A} = \int_{\alpha_n}^{e} \ln x dx = \int_{\alpha_n}^{e} 1 \times \ln x dx = [x \ln x]_{\alpha_n}^{e} - \int_{\alpha_n}^{e} x \times \frac{1}{x} dx$$

   i.e

   $$\mathscr{A} = e - \alpha_n \ln(\alpha_n) - (e - \alpha_n) = \alpha_n - \alpha_n \ln(\alpha_n) = \alpha_n + \frac{\alpha_n^2}{n} - \alpha_n = \frac{\alpha_n^2}{n}$$

   (b) Notons $C(\alpha_n; 0)$, $D(e; 0)$, $E(\alpha_n; \ln(\alpha_n))$ et $F(e; \ln(\alpha_n)$, comme la fonction logarithme népérien est croissante on a l'aire du rectangle $CDFE$ est inférieure à $\mathscr{A}$ elle-même inférieure à l'aire du rectangle $CDFG$ avec $F(e; 1)$ et $G(\alpha_n; 1)$, d'où :

   $$(\mathrm{e} - \alpha_n) \ln \alpha_n \leqslant \frac{\alpha_n^2}{n} \leqslant (\mathrm{e} - \alpha_n).$$

   (c) On a donc $n(e - \alpha_n) \geq \alpha_n^2$. De plus, on a $n(e - \alpha_n) \ln \alpha_n \leq \alpha_n^2 \Longleftrightarrow n(e - \alpha_n) \leq \dfrac{\alpha_n^2}{\ln(\alpha_n)}$ (notons que $\alpha_n > 1$). Au final :

   $$\alpha_n^2 \leq n(e - \alpha_n) \leq \frac{\alpha_n^2}{\ln(\alpha_n)}$$

   (d) En utilisant le théorème des gendarmes on obtient :

   $$\lim_{n \to +\infty} \alpha_n^2 = e^2 = \lim_{n \to +\infty} \frac{\alpha_n^2}{\ln(\alpha_n)} \Longrightarrow \lim_{n \to +\infty} n(e - \alpha_n) = e^2$$

   On a de plus $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n = \lim\limits_{n \to +\infty} e\left(1 - \dfrac{e}{n}\right)$. La suite (α_n) converge donc au rythme de la suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

   Remarque : Cette dernière interprétation m'apparaît comme très ambitieuse et il est fort improbable de retrouver une pareille question pour le bac métropole.