BACCALAUREAT GENERAL BLANC-Corrigé

<u>SESSION 2011</u>

MATHEMATIQUES-NON SPECIALISTE

Série : **S**

DUREE DE L'EPREUVE : **4 Heures**. COEFFICIENT : **7**.

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5.

L'utilisation de la calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter tous les exercices.

Il est invité à faire sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développé. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

BAC BLANC

Exercice 1. (3 points)

Cet exercice est une restitution organisée de connaissance

1. (a) On a :

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0}$$

ce qui est le taux d'accroissement de la fonction sinus entre 0 et x, comme il s'agit d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ alors, la limite de ce taux de variation lorsque x tend vers 0 est le nombre dérivé de la fonction sinus en 0 i.e $\cos 0$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \cos 0 = 1$$

(b) On a :

$$\frac{\sin 4x}{x} = 4 \times \frac{\sin 4x}{4x}$$

1^{er} *type de rédaction* : Comme lim $\lim\limits_{x\to 0} 4x = 0 = \lim\limits_{x\to 0} x$ on en déduit :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{x} = 4 \times 1 = 4$$

2^{nd} *type de rédaction* : Il est encore possible de poser $X = 4x$, qui tend vers 0 lorsque x tend vers 0 ce qui donne :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{x} = 4 \times \lim_{X\to 0} \frac{\sin X}{X} = 4 \times 1 = 4$$

2. Soit A un réel, puisque (u_n) est une suite non majorée alors il existe un certain entier, disons n_0 tel que :

$$u_{n_0} \geq A$$

Puisque (u_n) est croissante, alors pour tout $n \geq n_0$ on a :

$$u_n \geq u_{n_0} \geq A$$

ainsi pour tout réel A, tous les termes de la suite sont, à partir d'un certain rang n_0, supérieurs à A ce qui, par définition, nous permet de conclure que (u_n) tend vers $+\infty$

Exercice 2. (5 points)

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
On réalisera une figure en prenant 4 cm comme unité graphique sur chaque axe.
On considère le point A d'affixe $z_{\mathrm{A}} = 1$.

Partie A

k est un réel strictement positif ; f est la similitude directe de centre O de rapport k et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
On note $\mathrm{A}_0 = \mathrm{A}$ et pour tout entier naturel n, $\mathrm{A}_{n+1} = f(\mathrm{A}_n)$.

1. (a) On a :

$$z' = ke^{i\frac{\pi}{3}}z$$

(b)

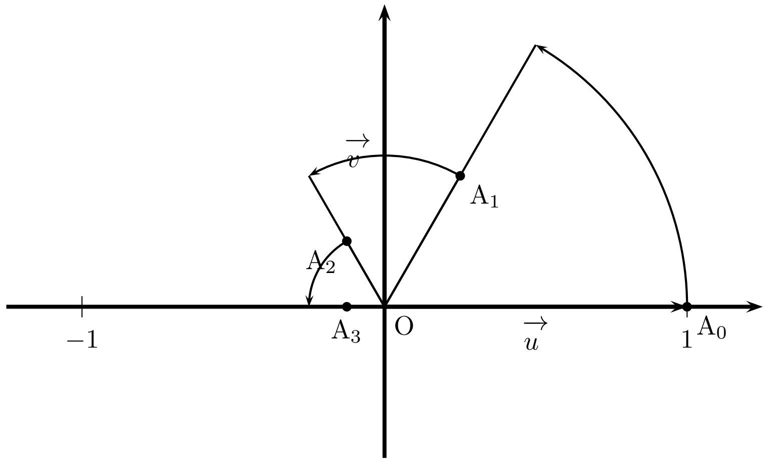
2. $\mathrm{A}_0 = \mathrm{A}$; son affixe est 1 ;

$\mathrm{A}_1 = f(\mathrm{A}_0)$: son affixe est $\frac{1}{2} \times 1 \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{4} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{4}$;

$\mathrm{A}_2 = f(\mathrm{A}_1)$: son affixe est $\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{8} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{8}$;

$\mathrm{A}_3 = f(\mathrm{A}_2)$: son affixe est $\frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{8} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{8}\right)\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{8}$.

On fait à chaque fois une rotation de centre O d'angle $\frac{\pi}{3}$, puis une homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{2}$.



(a) Notons $\mathscr{P}(n)$ cette propriété :

- *Initialisation* : Pour $n = 0$ on a d'une part $z_A = 1$ et d'autre part $k^0 \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}0\pi}{3}} = 1$, par conséquent la propriété $\mathscr{P}$ est trivialement vraie au rang 0.
- *Hérédité* : Supposons que $\mathscr{P}$ soit vraie pour un certain rang n et montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$.
  On a alors $z_n = k^n \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}n\pi}{3}}$, de plus d'après la première question :
  $$z_{n+1} = ke^{i\frac{\pi}{3}} z_n = ke^{i\frac{\pi}{3}} \times k^n \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}n\pi}{3}} = k^{n+1} e^{i\left(\frac{n\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)} = k^{n+1} e^{i\frac{(n+1)\pi}{3}}$$
  Ainsi $\mathscr{P}$ est vraie au rang $n+1$
- *Conclusion* : Pour tout entier n, l'affixe z_n du point A_n est égale à $k^n \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}n\pi}{3}}$.

(b) $A_n \in \left[\mathrm{O}\ ;\ \vec{u}\right)$ si et seulement si l'argument de A_n vaut 0 à 2π près, i.e si et seulement si (avec $p \in \mathbb{Z}$) :

$$\frac{n\pi}{3} \equiv 0[2\pi] \iff \frac{n\pi}{3} = p2\pi \iff n = 6p$$

En résumé $A_n \in \left[\mathrm{O}\ ;\ \vec{u}\right)$ si et seulement n est un multiple de 6.

Au final $z_{A_n} = k^n$ car $\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}n\pi}{3}} = 1$ pour $n = 6p$, et donc l'abscisse de A_n est k^n.

Partie B

Dans cette partie toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

Désormais, k désigne un entier naturel non nul.

1. $$2008 = 2 \times 1004 = 2^2 \times 502 = 2^3 \times 251$$
   Il se trouve que 251 est un nombre premier, on peut le justifier en calculant sa racine carrée et en remarquant qu'il n'est divisible par aucun nombre premier inférieur à sa racine carrée.
2. Une première technique consisterait à tester une à une les valeurs de k jusqu'à trouver la plus petite valeur de k telle que k^6 est multiple de 2008, une deuxième technique consisterait à écrire un programme sur sa calculatrice effectuant les tests un à un (plutôt que de le faire nous même) qui nous renvoie la valeur cherchée (cette solution quoique peu mathématique m'apparait comme assez à la mode), et enfin bon ben on peut aussi utiliser les résultats du cours et les résultats des questions précédentes : c'est ce que je vais faire et qui semble le plus naturel : On veut que k^6 soit un multiple de 2008 donc on a :
   $$k^6 = 2008 \times a \qquad \text{avec } a \in \mathbb{N}$$
   Or, $2008 = 2^3 \times 251$ donc $k^6 = 2^3 \times 251 \times a$, le plus petit a vérifiant cette égalité est alors $a = 2^3 \times 251^5$ et on a alors :
   $$k^6 = 2^6 \times 251^6 = (2 \times 251)^6 = 502^6 \iff k = 502$$

Ainsi le plus petit entier k tel que k^6 est un multiple de 2008 est 502.

3. $A_n \in \left[\mathrm{O}\ ;\ \overrightarrow{u}\right) \iff n = 6p$ avec $p \in \mathbb{N}$ et dans ce cas $z_{A_n} = k^n = k^{6p}$ doit être un multiple de 2008. On doit donc avoir un certain α entier tel que :

$$k^{6p} = 2008 \times \alpha \iff k^{6p} = 2^3 \times 251 \times \alpha$$

Compte tenu des propriétés de la décomposition en facteur premier $\alpha = 2^{6p-3} \times 251^{6p-1} \times \gamma^{6p}$ où γ est un entier.
Au final on a une égalité du type :

$$k^{6p} = \left(2 \times 251 \times \gamma\right)^{6p} \iff k = 502\gamma$$

Conclusion : le point A_n appartient à la demi droite $\left[\mathrm{O}\ ;\ \overrightarrow{u}\right)$ avec pour abscisse un nombre entier multiple de 2008 avec n multiple de 6 et k de 502.

Exercice 3. (6 points)

On considère la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = 1 + x\ln x.$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; I, J)$
Toutes les aires considérées dans ce problème seront exprimées en unités d'aire.

Partie A

Le but de cette partie est de déterminer un encadrement de l'aire $\mathscr{A}$ du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}_f$, et les deux droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.
On note M et N les points de $\mathscr{C}_f$ d'abscisses respectives 1 et 2, P et Q leurs projetés orthogonaux respectifs sur l'axe des abscisses. La figure est donnée en annexe 1.

1. (a) Et bien comme la fonction ln est strictement croissante sur $[1; 2]$ alors pour tout $x \in [1; 2]$ on a :

$$\ln x \geq \ln 1 = 0$$

Ainsi trivialement, pout tout $x \in [1; 2]$:

$$f(x) \geq 1 + 0 = 1 > 0$$

(b) Notons a ce coefficient directeur alors on a :

$$a = \frac{y_N - y_M}{x_N - x_M} = y_N - y_M = f(2) - f(1) = 1 + 2\ln 2 - 1 - 1\ln 1 = 2\ln 2$$

(c) Sur l'intervalle $[1; 2]$ la fonction f est dérivable, par conséquent tout point *truc* de $\mathscr{C}_f$ admet une tangente si son abscisse est comprise entre 1 et 2 et cette tangente, que l'on va nommer T_{truc} a pour coefficient directeur $f'(x)$ où x désigne l'abscisse du point *truc*.
On a alors la suite d'équivalence suivante :

$$\begin{aligned}
& T_{truc} // (MN) \\
\iff\ & f'(x) = 2\ln 2 \\
\iff\ & \ln x + x \times \frac{1}{x} = 2\ln 2 \\
\iff\ & \ln x + 1 = 2\ln 2 \\
\iff\ & \ln x = 2\ln 2 - 1 \\
\iff\ & x = e^{2\ln 2 - 1} = e^{\ln 4}e^{-1} = \frac{4}{e}
\end{aligned}$$

Ainsi $T_{truc}//(MN)$ si et seulement si l'abscisse du point *truc* est $\frac{4}{e} \iff truc = E$, d'où la conclusion.

(d) L'équation de T est de la forme

$$y = f'\left(\frac{4}{e}\right)\left(x - \frac{4}{e}\right) + f\left(\frac{4}{e}\right)$$

Or, $f'\left(\frac{4}{e}\right) = 2\ln 2$ d'après la question précédente et $f\left(\frac{4}{e}\right) = 1 + \frac{4}{e}\ln\frac{4}{e} = 1 + \frac{4}{e}(\ln 4 - 1) = 1 + \frac{4\ln 4}{e} - \frac{4}{e} = 1 + \frac{8\ln 2}{e} - \frac{4}{e}$.
Ainsi :

$$y = 2\ln 2\left(x - \frac{4}{e}\right) + 1 + \frac{8\ln 2}{e} - \frac{4}{e} = 2\ln 2x - \frac{8\ln 2}{e} + 1 + \frac{8\ln 2}{e} - \frac{4}{e} = (2\ln 2)x - \frac{4}{e} + 1$$

2. Soit g la fonction définie sur $[1;2]$ par : $g(x) = f(x) - \left[(2\ln 2)x - \frac{4}{e} + 1\right]$.

(a) $\forall x \in [1;2]$ on a :

$$g'(x) = f'(x) - 2\ln 2 = \ln x + 1 - 2\ln 2 = 1 + \ln x - \ln 4 = 1 + \ln\frac{x}{4}$$

(b) On a $g'(x) = 0 \Longleftrightarrow 1 + \ln\frac{x}{4} \geq 0 \Longleftrightarrow \ln\frac{x}{4} \geq -1 \Longleftrightarrow \frac{x}{4} \geq \frac{1}{e} \Longleftrightarrow x \geq \frac{4}{e}$.

x	1		$\frac{4}{e}$		2
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Ainsi $g(x) \geq 0$ ce qui implique que $\mathscr{C}_f$ est au dessus de T sur $[1;2]$

3. Soient M' et N' les points d'abscisses respectives 1 et 2 de la droite T. On admet que la courbe $\mathscr{C}_f$ reste sous la droite (MN) sur l'intervalle $[1;2]$ et que les points M' et N' ont des ordonnées strictement positives.

(a) Compte tenu de tout ce qu'on vient d'admettre, l'aire disons $\mathscr{B}$ du trapèze $MNQP$ est (en notant $W(2;1)$) :

$$\mathscr{B} = \mathscr{A}(MWQP) + \mathscr{A}(MWN) = 1 + \frac{f(2) - 1}{2} = 1 + \frac{1 + 2\ln 2 - 1}{2} = 1 + \ln 2 \quad \text{u.a}$$

et puis l'aire $\mathscr{D}$ du trapèze $M'N'QP$ (en notant $W(2; 2\ln 2 - 4/e + 1)$) est :

$$\mathscr{D} = \mathscr{A}(M'W'QP) + \mathscr{A}(M'W'N') = 2\ln 2 - \frac{4}{e} + 1 + \frac{4\ln 2 - 4/e + 1 - 2\ln 2 + 4/e - 1}{2}$$

$$\mathscr{D} = 2\ln 2 - \frac{4}{e} + 1 + \ln 2 = 3\ln 2 - \frac{4}{e} + 1 \quad \text{u.a}$$

(b) Notons que $f(x) > 0$ sur $[1;2]$, ainsi $\mathscr{A} = \int_1^2 f(x)dx$.
Comme $\mathscr{C}_f$ est au dessus de T mais au dessous de (MN) sur $[1;2]$ on obtient :

$$\mathscr{D} \leq \int_1^2 f(x)dx \leq \mathscr{B} \Longleftrightarrow 3\ln 2 - \frac{4}{e} + 1 \leq \int_1^2 f(x)dx \leq 1 + \ln 2$$

Or : $3\ln 2 - \frac{4}{e} + 1 \simeq 1,6$ et $1 + \ln 2 \simeq 1.7$, ainsi à 10^{-1} près on obtient (en u.a) :

$$1,6 < \mathscr{A} < 1,7$$

Partie B

Le but de cette partie est de déterminer la valeur exacte de $\mathscr{A}$.

1. $$\int_1^2 x\ln x dx = \left[\frac{x^2}{2}\times \ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2}\times\frac{1}{x}dx$$

   i.e

   $$\int_1^2 x\ln x dx = 2\ln 2 - 0 - \frac{1}{2}\int_1^2 x dx = 2\ln 2 - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = 2\ln 2 - \frac{1}{2}\left(2-\frac{1}{2}\right) = 2\ln 2 - 1 + \frac{1}{4} = 2\ln 2 - \frac{3}{4} \quad \text{u.a}$$

2. On a déjà vu que :

   $$\mathscr{A} = \int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 1 + x\ln x dx = \int_1^2 dx + \int_1^2 x\ln x dx = 1 + 2\ln 2 - \frac{3}{4} = 2\ln 2 + \frac{1}{4} \quad \text{u.a}$$

Exercice 4. (6 points)

On cherche à modéliser de deux façons différentes l'évolution du nombre, exprimé en millions, de foyers français possédant un téléviseur à écran plat, en fonction de l'année.

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A : un modèle discret

Soit u_n le nombre, exprimé en millions, de foyers possédant un téléviseur à écran plat l'année n.

On pose $n = 0$ en 2005, $u_0 = 1$ et, pour tout $n \geqslant 0$,

$$u_{n+1} = \frac{1}{10}u_n\left(20 - u_n\right).$$

1. Soit f la fonction définie sur $[0\ ;\ 20]$ par

$$f(x) = \frac{1}{10}x(20 - x).$$

(a) Pour tout $x \in [0\ ;\ 20]$ on a :

$$f'(x) = 0,1(20 - x) - 0,1x = 0,1(20 - x - x) = 0,1(20 - 2x) = 2 - 0,2x$$

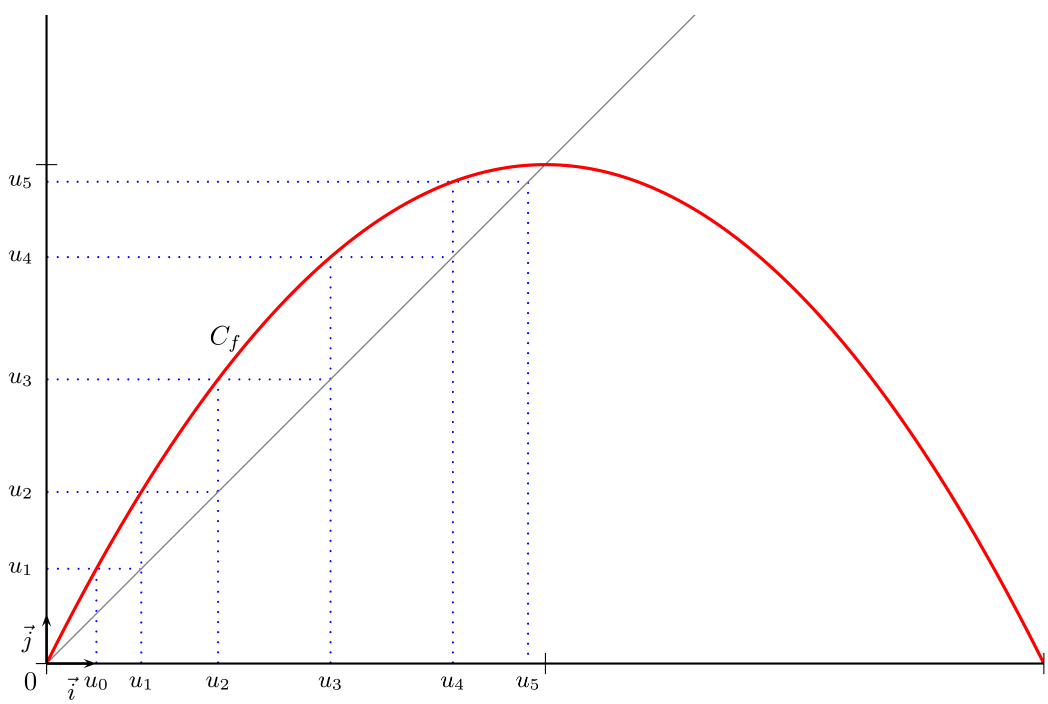
Or $f'(x) \geq 0 \iff 2 - 0,2x \geq 0 \iff 2 \geq 0,2x \iff x \leq 2 \times 5 = 10$

D'où :

x	0		10		20
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	0	↗	10	↘	0

(b) Evident d'après la question précédente.

(c)



2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 10$.
Notons $\mathscr{P}(n)$ cette propriété.

– *Initialisation* : On a $u_0 = 1$ et $u_1 = 1,9$, ce qui donne bien :

$$0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 10$$

La propriété $\mathscr{P}$ est donc vraie au rang 0.

– *Hérédité* : Supposons que $\mathscr{P}$ soit vraie pour un certain rang n et montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$. Ainsi on a, comme la fonction f est strictement croissante sur $[0;10]$, la série d'équivalence suivante :

$$\begin{aligned} & 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 10 \\ \iff & f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(10) \\ \iff & 0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 10 \end{aligned}$$

La propriété $\mathscr{P}$ est donc vraie au rang $n+1$ dès qu'elle l'est au rang n.

– *Conclusion* On vient de démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 10$.

3. D'après la question précédente $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite croissante et majorée par 10, par conséquent elle converge vers un réel que nous allons noter ℓ.
   On a comme f est continue sur $\mathbb{R}$, $u_{n+1} = f(u_n) \iff \ell = f(\ell)$ i.e

$$u_{n+1} = \frac{1}{10}u_n\,(20 - u_n) \iff \ell = \frac{1}{10}\ell(20-\ell) \iff \ell = 2\ell - 0,1\ell^2 \iff 10\ell = 20\ell - \ell^2 \iff \ell^2 - 10\ell = 0$$

   i.e

$$\ell(\ell - 10) = 0 \iff \ell = 0 \quad \text{ou} \quad \ell = 10$$

   Or, $u_0 = 1$ et (u_n) est une suite croissante, par conséquent $\ell \neq 0$ donc $\ell = 10$.

Partie B : un modèle continu

Soit $g(x)$ le nombre, exprimé en millions, de tels foyers l'année x.
On pose $x = 0$ en 2005, $g(0) = 1$ et g est une solution, qui ne s'annule pas sur $[0\ ;\ +\infty[$, de l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}) \quad ; \quad y' = \frac{1}{20}y(10 - y).$$

1. On considère une fonction y qui ne s'annule pas sur $[0\ ;\ +\infty[$ et on pose $z = \dfrac{1}{y}$.

   (a) Notons que $z = \dfrac{1}{y} \iff y = \dfrac{1}{z} \implies y' = -\dfrac{z'}{z^2}$

$$\begin{aligned} & y \text{ solution de } (E) \\ \iff & y' = \frac{1}{20}y(10-y) \\ \iff & -\frac{z'}{z^2} = \frac{1}{20} \times \frac{1}{z}\left(10 - \frac{1}{z}\right) \\ \iff & -z' = \frac{1}{20}z\left(10 - \frac{1}{z}\right) \\ \iff & -z' = \frac{1}{20}(10z - 1) \\ \iff & -z' = \frac{1}{2}z - \frac{1}{20} \\ \iff & z' = -\frac{1}{2}z + \frac{1}{20} \\ \iff & z \text{ solution de } (E_1) \end{aligned}$$

   (b) Les solutions z de l'équation (E_1) sont de la forme :

$$z(t) = Ke^{-0,5t} - \frac{0,05}{-0,5} = Ke^{-0,5t} + \frac{1}{10} \qquad \text{avec } K \in R \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

Par conséquent d'après la question précédente les solutions h de l'équation (E) sont de la forme :

$$h(t) = \frac{1}{Ke^{-0,5t} + \frac{1}{10}} \qquad \text{avec } K \in R \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

2. D'après la question précédente on a :

$$g(t) = \frac{1}{Ke^{-0,5t} + \frac{1}{10}} \qquad \text{avec } K \in R \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

De plus $g(0) = 1 \iff \dfrac{1}{K+0,1} = 1 \iff K + 0,1 = 1 \iff K = 0,9 = \dfrac{9}{10}$.
Ainsi pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a :

$$g(t) = \frac{1}{\frac{9}{10}e^{-0,5t} + \frac{1}{10}} = \frac{10}{9e^{-0,5t}+1}$$

3.

$$g'(t) = -\frac{10 \times (-9/2)e^{-0,5t}}{(9e^{-0,5t}+1)^2} = \frac{45e^{-0,5t}}{(9e^{-0,5t}+1)^2}$$

Le dénominateur est trivialement strictement positif, et donc $g'(x)$ est du signe du numérateur, qui est lui aussi strictement positif (puisque c'est le cas de l'exponentielle de n'importe quoi) par conséqunet $g'(t) > 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$ et donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, en particulier sur $[0; +\infty[$.

4.

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{10}{9e^{-0,5x}+1} = \frac{10}{9 \times 0 + 1} = 10$$

D'après ce modèle dans un temps infini le nombre de foyers possédant un téléviseur à écran plat se stabilisera à 10 millions.

5. On cherche donc x tel que

$$g(x) \geq 5 \iff \frac{10}{9e^{-0,5x}+1} \geq 5 \iff 2 \geq 9e^{-0,5x}+1 \iff 1/9 \geq e^{-0,5x} \iff -\ln 9 \geq -0,5x \iff 2\ln 9 \leq x \iff x \geq 2\ln 9$$

Or, $2\ln 9 \simeq 4,4$ En 2010 le nombre de foyers possédant un tel équipement dépassera 5 millions, ce dépassement interviendra courant 2009 d'après ce modèle bien sûr.

ANNEXE 1
Cette page ne sera pas à remettre avec la copie