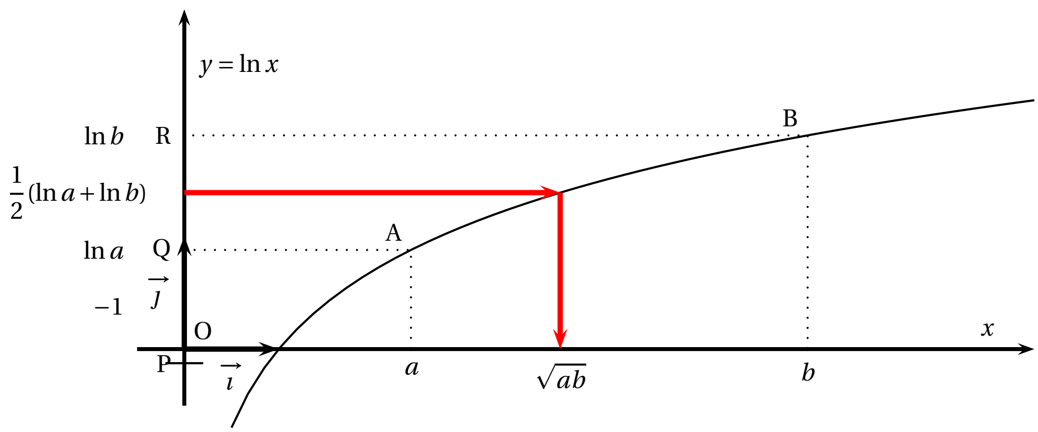
DEVOIR SURVEILLÉ 6

Exercice 1. R.O.C (4 points)



1. R. O. C. : en appliquant la propriété à $\ln m = \ln\left(\sqrt{m}\times\sqrt{m}\right)$, on obtient :

$$\ln m = \ln\sqrt{m}+\ln\sqrt{m} = 2\ln\sqrt{m} \iff \ln\sqrt{m} = \frac{1}{2}\ln m$$

(avec $m>0$).

2. On a $\ln a+\ln b = \ln ab = 2\ln\sqrt{ab} \iff \ln\sqrt{ab} = \frac{1}{2}(\ln a+\ln b)$.
D'où la construction :
– On construit la médiatrice de [QR].
– Cette médiatrice coupe Γ en un point dont l'abscisse est $\ln\sqrt{ab}$.

Exercice 2. (16 points)

1. Pour $x\in]1;+\infty[$, on a $\ln x>0$ et on sait que la fonction ln est dérivable sur $]0;+\infty[$, on en déduit que f est une fonction dérivable sur $]1;+\infty[$, avec :
$f'(x) = \frac{1}{x}+\frac{\frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{(\ln x)^2+1}{x(\ln x)^2}$.
Pour $x\in]1;+\infty[$, on a $(\ln x)^2+1>1>0$ et $x(\ln x)^2>0$, et donc $f'(x)>0$.
On en déduit que la fonction f est strictement croissante sur $]1;+\infty[$.
$\lim\limits_{x\to1}\ln x=0$, avec $\ln x>0$ pour $x>1$, par conséquent $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\frac{1}{\ln x}=+\infty$
et donc $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x)=-\infty$.
$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln x}=0$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

2. (a) Pour $x\in]1;+\infty[$, on a $f(x)-\ln x = -\frac{1}{\ln x}$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-\ln x=0$.
On en déduit que Γ est « asymptote »au voisinage de $+\infty$ à $(\mathscr{C})$. Attention, notons que Γ n'est pas une droite ici, mais une courbe, ainsi la courbe $(\mathscr{C})$ se rapproche de Γ d'aussi prêt que l'on veut lorsque x tend vers $+\infty$.

   (b) Pour $x\in]1;+\infty[$, on a $\ln x>0$ et donc $-\frac{1}{\ln x}<0$,
par conséquent $(\mathscr{C})$ est en dessous de Γ sur $]1;+\infty[$.

3. (a) La tangente $\mathscr{T}_a$ a pour équation $y=f'(a)(x-a)+f(a)$.

$$O(0,0)\in\mathscr{T}_a \iff 0=f'(a)(0-a)+f(a) \iff f(a)-af'(a)=0$$

   (b) Sur $]1;+\infty[$, on a $(\ln x)^2\neq0$, donc :
$g(x)=0 \iff f(x)-xf'(x)=0 \iff \ln x-\frac{1}{\ln x}-\frac{(\ln x)^2+1}{(\ln x)^2}=0$

$\iff \dfrac{(\ln x)^3 - \ln x - (\ln x)^2 - 1}{(\ln x)^2} = 0 \iff (\ln x)^3 - \ln x - (\ln x)^2 - 1 = 0.$

Ainsi les équations $g(x) = 0$ et $(\ln x)^3 - \ln x - (\ln x)^2 - 1 = 0$ ont le même ensemble de solution.

(c) La fontion u est une fonction polynôme, donc dérivable (et continue) sur $\mathbb{R}$,
avec $u'(t) = 3t^2 - 2t - 1$.
On a $\Delta = 16$, donc u' admet deux racines distinctes :
$t_1 = \dfrac{2-4}{6} = -\dfrac{1}{3}$ et $t_2 = \dfrac{2+4}{6} = 1$.
De plus, $u'(t) > 0$ pour $t \in]-\infty; -\dfrac{1}{3}[\cup]1; +\infty[$ et $u'(t) < 0$ pour $t \in]-\dfrac{1}{3}; 1[$.

t	0		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
Signe de $3t^2-2t-1$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variation de u	$-\infty$	↗	$-\frac{22}{27}$	↘	-2	↗	$+\infty$

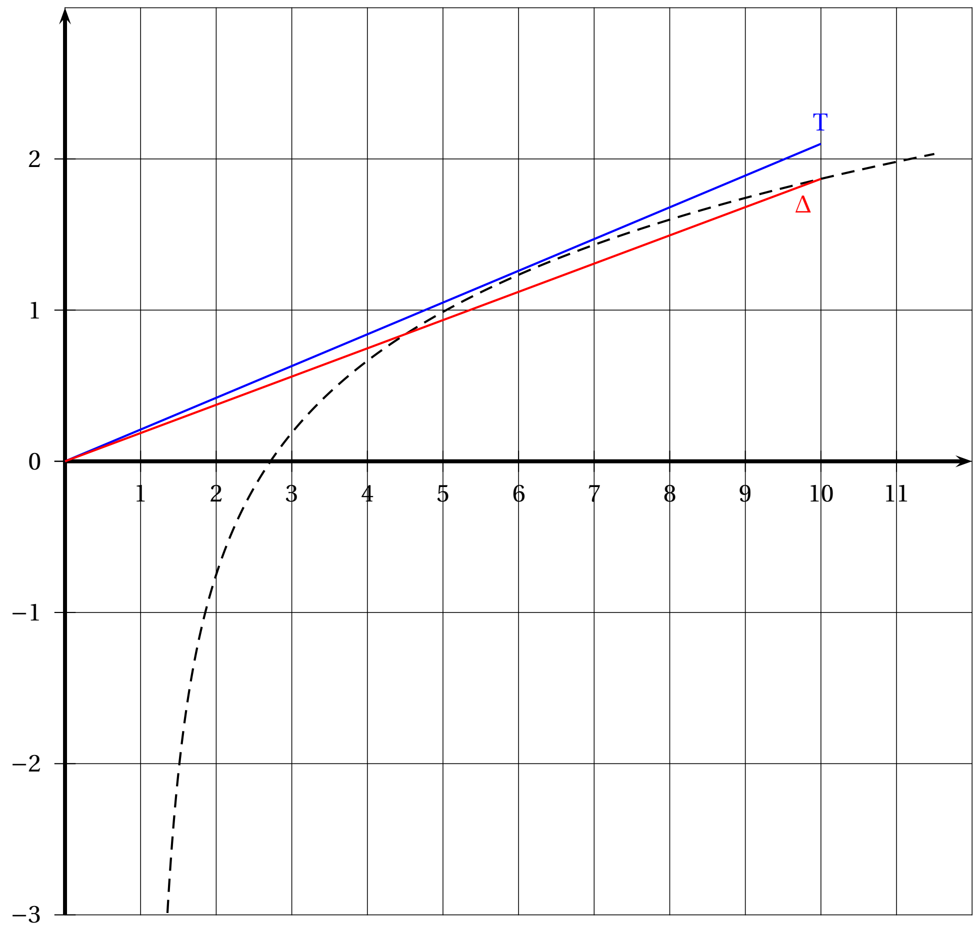
La fonction u est croissante sur $\left]-\infty\,;\,-\dfrac{1}{3}\right[$ et décroissante sur $\left]-\dfrac{1}{3}\,;\,1\right[$.
Par conséquent, sur $]-\infty\,;\,1[$, la fonction u admet un maximum en $-\dfrac{1}{3}$.
Ce maximum vaut $-\dfrac{22}{27}$, ainsi l'équation $u(t) = 0$ n'admet pas de solution sur $]-\infty\,;\,1[$.
La fonction u est continue et strictement croissante sur $[1\,;\,+\infty[$, avec $u(1) = -2$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t) = +\infty$.
Or $0 \in [-2; +\infty[$, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit que l'équation $u(t) = 0$ admet une unique solution sur $[1\,;\,+\infty[$,
par conséquent, l'équation $u(t) = 0$ admet une unique solution, α, sur $\mathbb{R}$.

(d)

$$(\ln x)^3 - \ln x - (\ln x)^2 - 1 = 0 \iff \begin{cases} t^3 - t^2 - t - 1 = 0 \\ t = \ln x \end{cases}$$

D'après ce qui précède, $\alpha \geq 1 > 0$, donc le réel x, tel que $\ln x = \alpha$, appartient à $]1\,;\,+\infty[$, ainsi l'équation $(\ln x)^3 - \ln x - (\ln x)^2 - 1 = 0$ admet une unique solution sur $]1\,;\,+\infty[$, il en est alors de même pour l'équation $g(x) = 0$ (d'après **3. b.**), et donc il existe une unique tangente à la courbe $(\mathscr{C})$ passant par l'origine du repère (d'après **3. a.**).

4. Soit p le coefficient directeur de la tangente T que l'on vient de tracer.
Sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$:
Pour $m \leq 0$, l'équation $f(x) = mx$ admet une solution.
Pour $0 < m < p$, l'équation $f(x) = mx$ admet deux solutions.
Pour $m = p$, l'équation $f(x) = mx$ admet une unique solution.
Pour $m > p$, l'équation $f(x) = mx$ n'admet pas de solution.
En traçant la droite Δ, passant par l'origine et par le point de coordonnées $(10\,;\,f(10))$, de coefficient directeur noté q, on obtient le résultat suivant :
Sur l'intervalle $]1\,;\,10[$:
Pour $m \leq 0$, l'équation $f(x) = mx$ admet une solution.
Pour $0 < m < q$, l'équation $f(x) = mx$ admet une solution unique.
Pour $q \leq m < p$, l'équation $f(x) = mx$ admet deux solutions.
Pour $m = p$, l'équation $f(x) = mx$ admet une unique solution.
Pour $m > p$, l'équation $f(x) = mx$ n'admet pas de solution.


T
Δ
2
1
0
−1
−2
−3
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11