Correction du devoir surveillé 5

Exercice 1. R.O.C (2 points)

Le plan complexe est rapporté à un repre orthonormal direct $(O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.
Soient A, B et C trois points du plan d'affixes respectives $a,\ b,\ c$.
On suppose que A et B sont distincts, ainsi que A et C.
On rappelle que $\left(\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right) = \arg(b-a) \quad [2\pi]$.
Montrer que $\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) = \arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right) \quad [2\pi]$.

Preuve

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right) &= \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{e_1}\right) + \left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{AC}\right) = -\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{AB}\right) + \left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{AC}\right)\\ &= -\arg(b-a) + \arg(c-a) = \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \qquad [2\pi]\end{aligned}$$

Exercice 2. (Antilles-Guyanne Sept. 2008)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x + 2 - \frac{4\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+3}.$$

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

1. (a) Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+3} = 0$. La limite de $f(x)$ est celle de $x+2$ soit $-\infty$.

   (b) On réécrit le quotient $\dfrac{e^x}{e^x+3} = \dfrac{e^x}{e^x\left(1+\frac{3}{e^x}\right)} = \dfrac{1}{1+\frac{3}{e^x}}$. Ainsi comme e^x tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{1+\frac{3}{e^x}} = 1$ et comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x+2 = +\infty$ on a :

   $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

   (c) $f(x) - (x+2) = -\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+3}$ et on a vu que la limite de ce quotient est égale à 0 au voisinage de $-\infty$. Ceci montre que la droite $\mathscr{D}_1$ d'équation $y = x+2$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $-\infty$.

   (d) Comme $4,\ \mathrm{e}^x,\ \mathrm{e}^x+3$ sont des nombres supérieurs à zéro, $-\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+3} < 0$.
   Ceci montre que la droite $\mathscr{D}_1$ est sous la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $-\infty$.

2. (a) f est une somme de quotients de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, le dénominateur ne s'annulant pas : elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et
   $f'(x) = 1 + \dfrac{-4\mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^x+3\right) + 4\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^x}{\left(\mathrm{e}^x+3\right)^2} = 1 - \dfrac{12\mathrm{e}^x}{\left(\mathrm{e}^x+3\right)^2} = \dfrac{\left(\mathrm{e}^x+3\right)^2 - 12\mathrm{e}^x}{\left(\mathrm{e}^x+3\right)^2} =$
   $\dfrac{\mathrm{e}^{2x} + 9 + 6\mathrm{e}^x - 12\mathrm{e}^x}{\left(\mathrm{e}^x+3\right)^2} = \dfrac{\mathrm{e}^{2x} + 9 - 6\mathrm{e}^x}{\left(\mathrm{e}^x+3\right)^2} = \dfrac{\left(\mathrm{e}^x-3\right)^2}{\left(\mathrm{e}^x+3\right)^2}$
   D'où finalement $f'(x) = \left(\dfrac{\mathrm{e}^x-3}{\mathrm{e}^x+3}\right)^2$, quel que soit $x \in \mathbb{R}$.

   (b) On a manifestement $f'(x) \geqslant 0$.
   La fonction f est donc croissante sur $\mathbb{R}$.
   On a $\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{4\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+3} = -4$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
   D'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		$\ln 3$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$		$\nearrow$		$+\infty$

3. (a) $f'(x) = 0 \iff \mathrm{e}^x = 3 \iff x = \ln 3$. $\mathscr{C}$ a donc une tangente horizontale au point d'abscisse $x = \ln 3$.
On a $f(\ln 3) = \ln 3 + 2 - \dfrac{4 \times 3}{3+3} = \ln 3$.
L'équation de $\mathscr{D}_2$ est $y = \ln 3$.

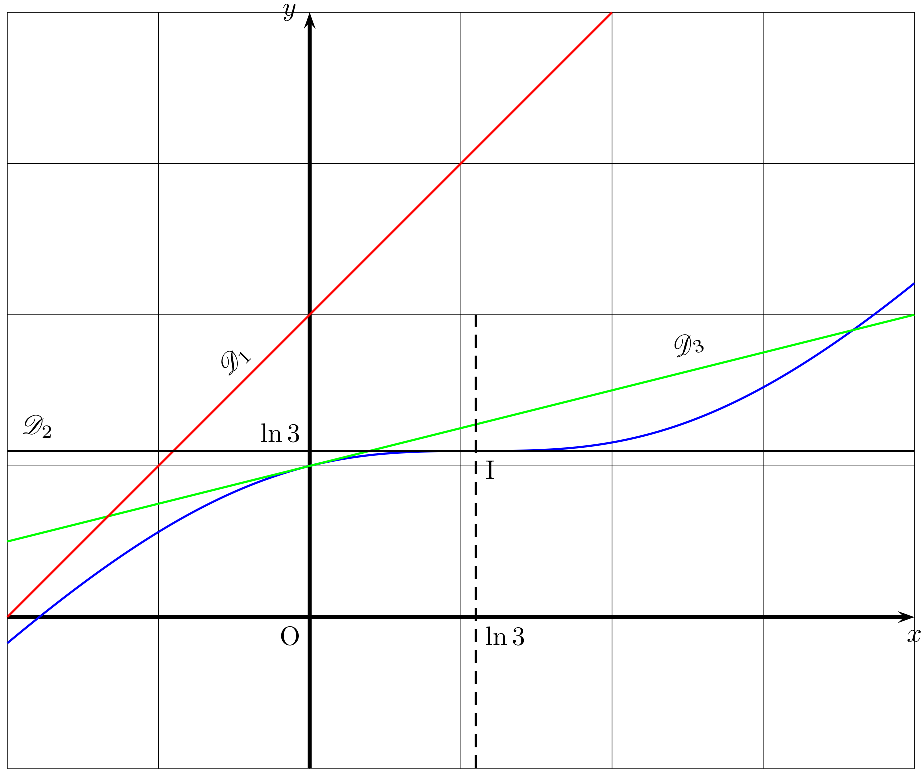
(b) - Si $x < \ln 3$, alors par croissance de f, $f(x) < f(\ln 3)$. La courbe $\mathscr{C}$ est sous la droite $\mathscr{D}_2$.
- Si $x > \ln 3$, alors par croissance de la fonction f $f(x) > f(\ln 3)$. La courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de la droite $\mathscr{D}_2$.
- Si $x = \ln 3$, alors $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}_2$ sont tangentes.

4. (a) $M(x\ ;\ y) \in \mathscr{D}_3 \iff \dfrac{Y - f(0)}{X - 0} = f'(0)$ (si $X \neq 0 \iff Y = f(0) + f'(0)X$.
$f(0) = 2 - \dfrac{4}{4} = 1$;
$f'(0) = \left(\dfrac{-2}{4}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$.
$M(x\ ;\ y) \in \mathscr{D}_3 \iff y = \dfrac{1}{4}x + 1$

(b) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) - \left(\dfrac{1}{4}x + 1\right)$.
g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = f'(x) - \dfrac{1}{4}$;
g' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'"(x) = f''(x) = \dfrac{12\mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^x - 3\right)}{\left(\mathrm{e}^x + 3\right)^3}$; ce quotient est du signe de $\mathrm{e}^x - 3$; le signe de g'' dépend donc de la position de x par rapport à $\ln 3$:
- si $x < \ln 3$, $g''(x) < 0$, ce qui signifie que g' est décroissante ;
- si $x > \ln 3$, $g''(x) > 0$, ce qui signifie que g' est croissante.
- g' admet donc un minimum en $\ln 3$ qui vaut $g'(\ln 3) = f'(\ln 3) - \dfrac{1}{4} = 0 - \dfrac{1}{4} = -\dfrac{1}{4}$.

On remarque que $g'(0) = f'(0) - \dfrac{1}{4} = \left(\dfrac{-2}{4}\right)^2 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4} = 0$.
On en déduit que sur $]-\infty\ ;\ 0[$, $g'(x) > 0$, donc g est croissante, puis que sur $]0\ ;\ \ln 3[$, $g'(x) < 0$, donc g est décroissante.
g a donc un maximum en $x = 0$ qui vaut $g(0) = f(0) - 1 = 2 - \dfrac{4}{4} - 1 = 0$.
Conclusion : sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ \ln 3[$, la fonction g est négative soit $f(x) - \left(\dfrac{1}{4}x + 1\right) < 0 \iff f(x) < \left(\dfrac{1}{4}x + 1\right)$, ce qui signifie que $\mathscr{C}$ est au dessous de $\mathscr{D}_3$ sur $]-\infty\ ;\ \ln 3[$.

5.



Exercice 3. (Amérique du nord Sept.2009)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

Soit A le point d'affixe $a = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ et B le point d'affixe $b = 1-\sqrt{3}+\left(1+\sqrt{3}\right)\mathrm{i}$.

Partie A : Etude d'un cas particulier

1. (a) $\dfrac{-a}{b-a} = \dfrac{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{-\sqrt{3}+\mathrm{i}} = \dfrac{\left(-1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right)\left(-\sqrt{3}-\mathrm{i}\right)}{4} = \mathrm{i}$

   (b) On en déduit que $0-a = \mathrm{i}(b-a)$, donc, que le point O est l'image de B(b) dans la rotation de centre A(a) et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. Le triangle OAB est bien rectangle, isocèle en A.

2. On utilise l'écriture complexe de la rotation $r\ :\ z'-0 = \mathrm{e}^{\frac{2\pi}{3}}(z-0)$.

   $c = \mathrm{e}^{\frac{2\pi}{3}}a = \mathrm{e}^{\frac{2\pi}{3}}(1+\mathrm{i}\sqrt{3}) = \left(-\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)(1+\mathrm{i}\sqrt{3}) = \dfrac{1}{2}\left(-1-(\sqrt{3})^2\right) = -2$

3. (a) On peut se contenter de vérifier que les coordonnées de A et de C vérifient cette équation : A$(1\ ;\ \sqrt{3})$ et C$(0\ ;\ -2)$.

   Pour A : $\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x+2) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}(1+2) = \sqrt{3}$. OK

   Pour C : $\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x+2) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}(-2+2) = 0$. OK

   A et C appartiennent à la droite d'équation $y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}(x+2)$, c'est donc bien la droite (AC).

   (b) L'affixe du milieu E de [BD] est $z_{\mathrm{E}} = \dfrac{b+d}{2} = \dfrac{1-\sqrt{3}+\left(1+\sqrt{3}\right)\mathrm{i}-2-2\mathrm{i}}{2} = \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}+\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$

   Or, $\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x_{\mathrm{E}}+2) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\left(\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}+2\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2} = y_{\mathrm{E}}$. E est bien sur (AC).

Partie B : Etude du cas général

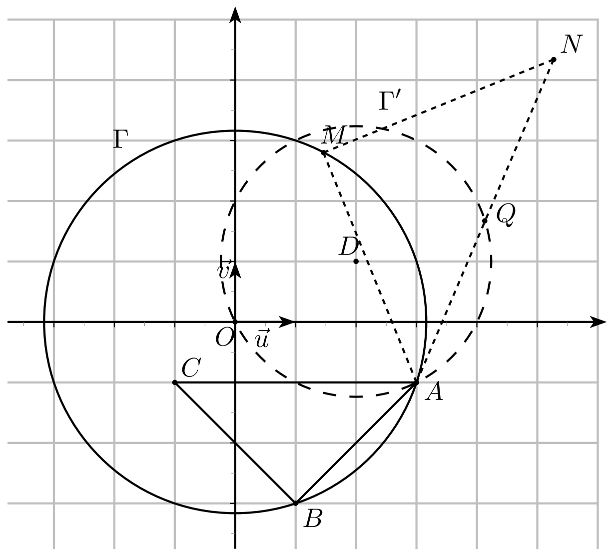
1. $a' = a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et $b' = b\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.
2. (a) $p = \dfrac{a+a'}{2} = \dfrac{1}{2}a\left(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)$ et $q = \dfrac{b+b'}{2} = \dfrac{1}{2}b\left(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)$

(b) $\dfrac{-p}{q-p} = \dfrac{-\frac{1}{2}a\left(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)}{\frac{1}{2}b\left(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right) - \frac{1}{2}a\left(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)} = \dfrac{-a}{b-a}$ en simplifiant par $\dfrac{1}{2}(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$

(c) Or, d'après la question A 1. a., $\dfrac{-a}{b-a} = \mathrm{i}$, donc $\dfrac{-p}{q-p} = \mathrm{i}$. Donc, $\left(\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\,;\overrightarrow{\mathrm{PO}}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$
Les droites (OP) et (PQ) sont bien orthogonales.

(d) A′ est l'image de A dans une rotation de centre O, donc OA′ = OA et O est sur la médiatrice de (AA′). Comme P est le milieu de [AA′], cette médiatrice est donc (OP).
Les deux droites (PQ) et (AA′) sont donc orthogonales à (OP) et passent par P, elles sont donc confondues et Q appartient bien à (AA′).

Exercice 4. (Pondichéry Avril 2009)



1. (a)

(b) $\dfrac{c-b}{a-b} = \dfrac{-2+2i}{2+2i} = \dfrac{i(2+2i)}{2+2i} = i$ de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$ donc
$BA = BC$ et $(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}) = \dfrac{\pi}{2}$. (*Interprétation géométrique d'un quotient*). Le triangle ABC est donc rectangle isocèle de sommet B.

(c) $|a| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$ et $|b| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$ donc $OA = OB = \sqrt{10}$. Les points sur le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{10}$.

2. (a) La rotation de centre $M(m)$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ a pour expression complexe : $z' = e^{i\frac{\pi}{2}}(z-m)+m$ soit $z' = iz + (1-i)m$.

(b) $N(n)$ est l'image de A par r, donc $n = ia + (1-i)m = 1+3i+(1-i)m$.

3. Le milieu Q du segment [AN] a pour affixe $q = \dfrac{a+n}{2} = 2+i+\dfrac{(1-i)m}{2}$.

4. Dans cette question, M est un point du cercle Γ.

(a) Le point $M(z)$ est sur le cercle de centre $\Omega(\omega)$ et de rayon r si et seulement s'il existe un réel θ tel que $z = \omega + re^{i\theta}$ (*Représentation paramétrique d'un cercle*). Ici, M est sur le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{10}$ donc il existe un réel θ tel que : $m = \sqrt{10}\mathrm{e}^{i\theta}$.

(b) $|q-2-i| = \left|\dfrac{(1-i)m}{2}\right| = \dfrac{12|1-i|}{|m|} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{10} = \sqrt{5}$. Si D est le point d'affixe $d = 2+i$, alors $DQ = \sqrt{5}$ donc Q est sur le cercle de centre D et de rayon $\sqrt{5}$.
Plus précisément, $q - d = \dfrac{(1-i)m}{2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\sqrt{10}e^{i\theta} = \sqrt{5}e^{i(\theta-\frac{\pi}{4})}$. Quand M décrit le cercle Γ, θ décrit $\mathbb{R}$, $\theta - \dfrac{\pi}{4}$ décrit $\mathbb{R}$ et le point Q décrit **tout le cercle** de centre D et de rayon $\sqrt{5}$.