Correction du devoir surveillé 4

Exercice 1. R.O.C (4 points)

PRÉ-REQUIS

Les solutions de l'équation différentielle $y' = -\lambda y$ sont les fonctions $x \mapsto C\mathrm{e}^{-\lambda x}$ où C est une constante réelle. Le but de cette question est de démontrer l'existence et l'unicité de la solution z de l'équation différentielle (E'$_\lambda$) : $z' = -(\lambda z + 1)$ telle que $z(0) = 1$.

1. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = -\frac{1}{\lambda}$$
est solution de $z' = -(\lambda z + 1)$.
2. Montrer que z est solution de $z' = -(\lambda z + 1)$ est équivalent à $z - f$ est solution de l'équation différentielle $y' = -\lambda y$.
3. En déduire l'ensemble des solutions z de l'équation différentielle $z' = -(\lambda z + 1)$.
4. En déduire l'existence et l'unicité de la solution de (E'$_\lambda$) dont on donnera l'expression z_0

Preuve

1. On pour tout $x \in \mathbb{R}$
$$f'(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad -\left(\lambda \times \frac{-1}{\lambda} + 1\right) = 0$$
Par conséquent f est solution de $z' = -(\lambda z + 1)$.
2. On a la série d'équivalence suivante :
$$\begin{aligned}
& z \text{ est solution de } z' = -(\lambda z + 1) \\
\iff\ & z' = -(\lambda z + 1) \\
\iff\ & z' - f' = -(\lambda z + 1) - [-(\lambda f + 1)] \quad \text{en effet on vient de démontrer que} f' = -(\lambda f + 1) \\
\iff\ & (z - f)' = -\lambda z + \lambda f \\
\iff\ & (z - f)' = -\lambda(z - f) \\
\iff\ & z - f \text{ est solution de l'équation différentielle } y' = -\lambda y
\end{aligned}$$
3. D'après la première question, il existe au moins une solution à l'équation différentielle $z' = -(\lambda z + 1)$, de plus on vient de montrer que pour z solution de cette équation différentielle, la fonction $z - f$ est solution de $y' = -\lambda y$, équation dont on connaît les solutions d'où :
$$(z - f)(x) = C\mathrm{e}^{-\lambda x}$$
où C est une constante.
Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :
$$z(x) = C\mathrm{e}^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda}$$
Si on ajoute, de plus, la condition $z(0) = 1$ alors :
$$1 = C - \frac{1}{\lambda} \iff C = 1 + \frac{1}{\lambda}$$
Ainsi (E'$_\lambda$) admet une unique solution qui est
$$z_0(x) = \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)\mathrm{e}^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda}$$

Exercice 2.

PARTIE A.

1. f est solution de l'équation différentielle $y' = -\frac{1}{2}y + 10$, donc d'après un théorème du cours, il existe une constante k telle que, pour tout $t \geqslant 0$:

$$f(t) = k\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t} - \frac{10}{-\frac{1}{2}} = k\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t} + 20.$$

La condition $f(0) = 220$ entraîne alors que $k + 20 = 220$, c'est-à-dire $k = 200$. Finalement :

$$f(t) = 200\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} + 20.$$

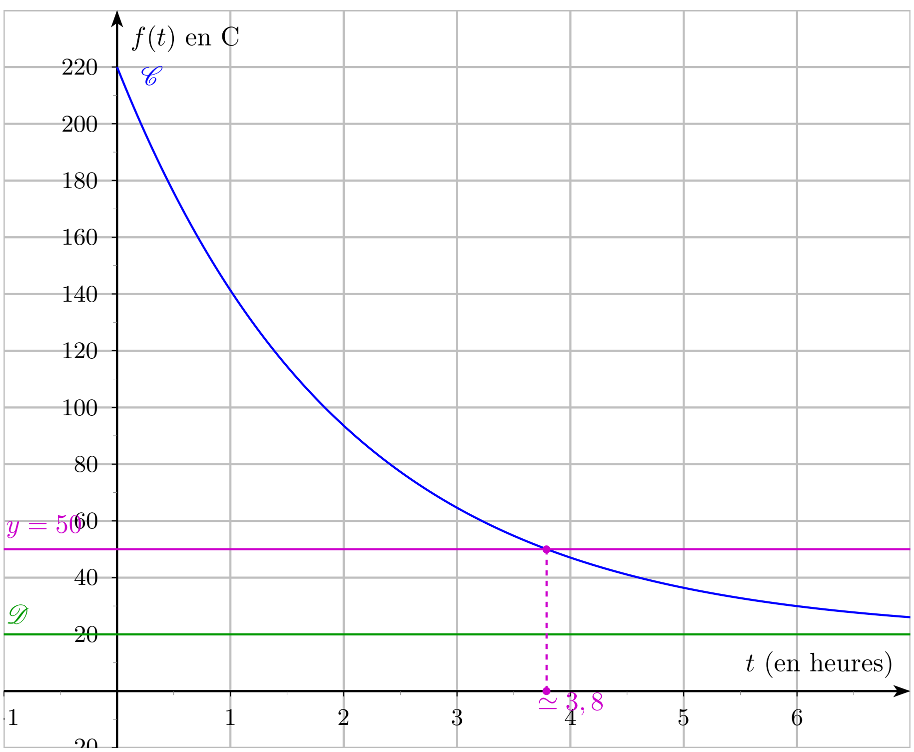
2. (a) f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ en tant que combinaison simple de fonctions qui le sont, et, pour tout $t \geqslant 0$:

$$f'(t) = -100\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} < 0;$$

la fonction f est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

(b) $\lim\limits_{t\to+\infty} -\frac{t}{2} = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} \mathrm{e}^X = 0$, donc par composition $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} = 0$. On en déduit par opérations que $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 20$; ce qui signifie que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 20$ est asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.

(c) Voir figure.



3. (a) Graphiquement, $f(t) = 50$ pour $t = 3,8$, soit 3 heures et 48 minutes environ.

(b) Résolvons :

$$\begin{aligned} f(t)=50 &\iff 200e^{-\frac{t}{2}}+20=50 \\ &\iff 200e^{-\frac{t}{2}}=30 \\ &\iff \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}=\frac{3}{20} \\ &\iff -\frac{t}{2}=\ln\left(\frac{3}{20}\right) \\ &\iff t=-2\ln\left(\frac{3}{20}\right)\simeq 3,79 \text{ 0,01 prs} \end{aligned}$$

On retrouve bien le résultat précédent.

PARTIE B.

1. (a) A l'aide de la calculatrice, au dixième près : $d_0 \simeq 78,7$, $d_1 \simeq 47,7$, $d_2 \simeq 28,9$.

   (b) $d_n = 200e^{-\frac{n}{2}} + 20 - 200e^{-\frac{n+1}{2}} - 20 = 200\left(e^{-\frac{n}{2}} - e^{-\frac{n+1}{2}}\right)$
   Or,
   $$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{n}{2}} = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{n+1}{2}} = 0$$
   Ainsi on obtient :
   $$\lim_{n\to+\infty} d_n = 0$$

2. On détermine à partir de quel entier naturel n on a $d_n \leqslant 5$.

$$\begin{aligned} d_n \leqslant 5 &\iff 200\mathrm{e}^{-\frac{n}{2}} - 200\mathrm{e}^{-\frac{n+1}{2}} \leqslant 5 \\ &\iff 200\mathrm{e}^{-\frac{n}{2}}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right) \leqslant 5 \\ &\iff 40\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right) \leqslant \mathrm{e}^{\frac{n}{2}} \\ &\iff \ln\left[40\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right)\right] \leqslant \frac{n}{2} \\ &\iff 2\ln\left[40\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right)\right] \leqslant n \end{aligned}$$

et comme $2\ln\left[40\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right)\right] \simeq 5,5$ (au dixième près), la plus petite valeur de l'entier n à partir de laquelle l'abaissement de la température est inférieur 5 C est donc $n = 6$.
Remarque : on pouvait aussi démontrer que la suite (d_n) est décroissante, puis calculer d_5 et d_6 et conclure.