CORRECTION DS 3 : CONTINUITÉ-TVI-DÉRIVABILITÉ

Exercice 1. On se propose de déterminer le nombre de racine(s) du polynôme P définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$P(x) = 4x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 1$$

1. P est une fonction polynôme, P est donc dérivable sur $\mathbb{R}$. On a,

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad P'(x) = 16x^3 - 9x^2 + 4x - 1$$

et P′ est aussi une fonction polynôme donc P′ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad P''(x) = 48x^2 - 18x + 4$$

2. On cherche les racines du polynôme de degré 2 P″.
$\Delta = b^2 - 4ac = 18^2 - 4 \times 48 \times 4 = -444 < 0$ donc P″ n'a pas de racine est un signe constant sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	$+\infty$
$P''(x)$	$+$	
$P'(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

3.
$$\lim_{x\to-\infty} P'(x) = \lim_{x\to-\infty} 16x^3 = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} P'(x) = \lim_{x\to+\infty} 16x^3 = +\infty$$

P′ est un polynôme donc P est continue sur $\mathbb{R}$, de plus d'après la question précédente P′ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ en prenant des valeurs de « $-\infty$ à $+\infty$ ». D'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $P'(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$, notons la α_1, et on a d'après la calculatrice :

$$\alpha_1 \simeq 0,4$$

4. D'après les deux questions précédentes on peut dresser le tableau de signe de P′ et par conséquent le tableau de variation de P :

x	$-\infty$		α_1		$+\infty$
$P'(x)$		$-$	0	$+$	
$P(x)$	$+\infty$	↘	$P(\alpha_1)$	↗	$+\infty$

On a $P(\alpha_1) \simeq P(0,4) \simeq 0,8$

5.
$$\lim_{x\to-\infty} P'(x) = \lim_{x\to-\infty} 4x^4 = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} P'(x) = \lim_{x\to+\infty} 4x^4 = +\infty$$

D'après le tableau de variation de P, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad P(x) \geq P(\alpha_1) \simeq 0,8 > 0$$

6. Comme $P(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'équation $P(x) = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

7. On considère le polynôme Q définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$Q(x) = \frac{4}{5}x^5 - \frac{3}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - 1$$

(a) Q est un polynôme donc Q est dérivable et :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad Q'(x) = 5 \times \frac{4}{5}x^4 - 4 \times \frac{3}{4}x^3 + 3 \times \frac{2}{3}x^2 - 2 \times \frac{1}{2}x + 1 = 4x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 1 = P(x)$$

(b) On sait que $P(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, donc $Q'(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, d'où :

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$Q'(x)$	$+$
$Q(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} Q(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{4}{5}x^5 = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} P'(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{4}{5}x^5 = +\infty$$

Q est une fonction polynôme donc Q est continue sur $\mathbb{R}$, de plus Q est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ en prenant des valeurs de « $-\infty$ à $+\infty$ », par conséquent d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $Q(x) = 0$ admet une unique racine, que l'on note α_2. A l'aide de la calculatrice on obtient :

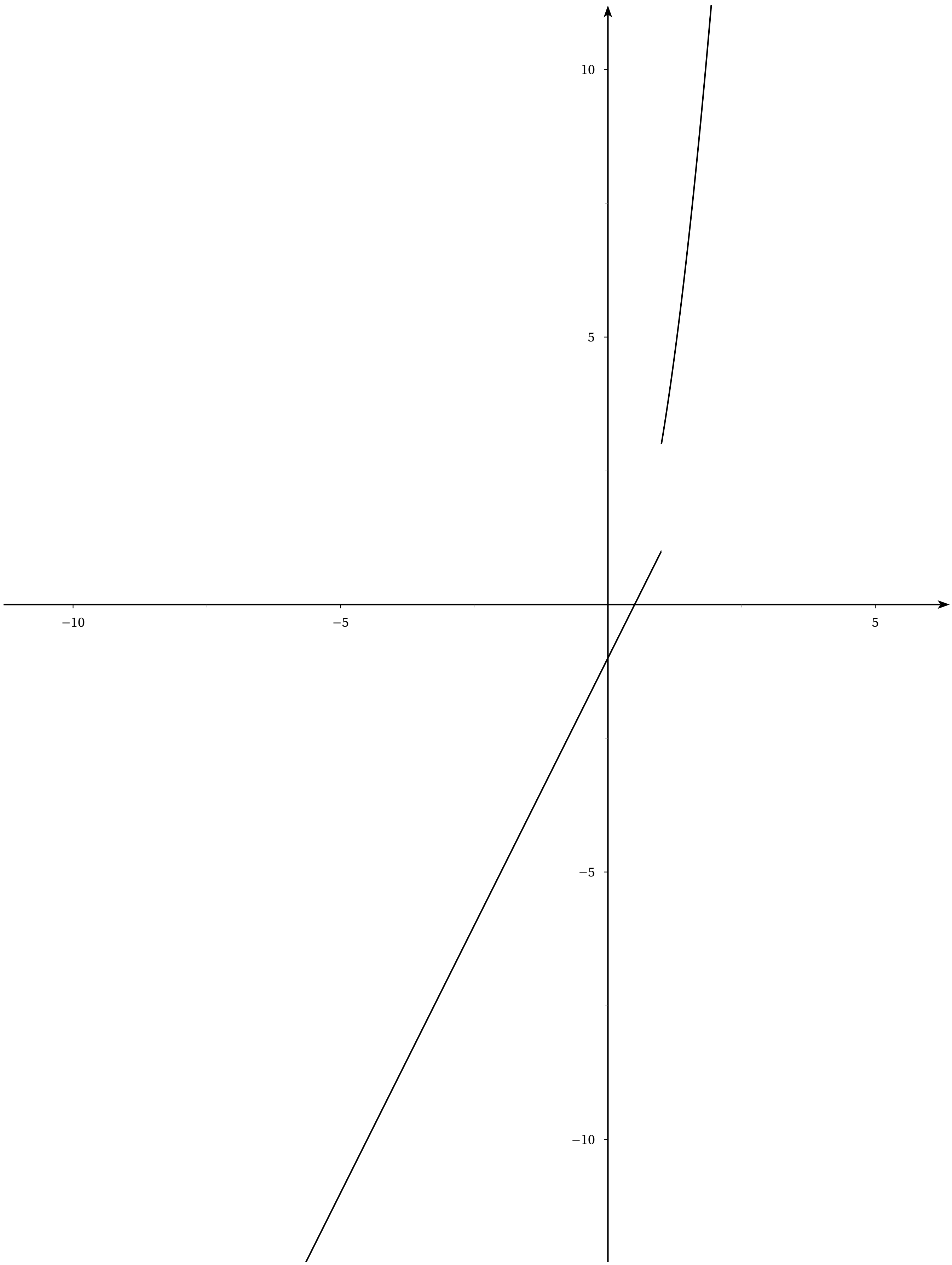
$$\alpha_2 \simeq 0,9$$

<u>Exercice</u> 2. (3 points)

On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x < 1 \\ 3x^2 - a & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

1.


10
5
−10
−5
5
−5
−10

On observe une discontinuité de la fonction f en 1, qui se justifie car les limites à gauche et à droite en 1 ne sont pas identiques, ainsi :

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} 2x-1 = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} 3x^2 = 3$$

2. En tant que fonction polynôme sur l'intervalle ouvert $]-\infty;1[$ la fonction f y est continue, il en va de même sur l'intervalle ouvert $]1;+\infty[$.
3. Pour que f soit continue en 1 il faut que les limites à gauche et à droite de 1 soient égales :

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) \Longleftrightarrow 2-1 = 3-a \Longleftrightarrow 1-3 = -a \Longleftrightarrow 2 = a$$

Ainsi, f est continue en 1 si et seulement si $a = 2$.

<u>Exercice</u> 3. (6 points)

On considère la fonction f définie pour $x \neq -1$ par :

$$f(x) = \frac{-x^2+2x+5}{x+1}$$

On désigne par $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de la fonction f dans un repère $(\text{O};\vec{\imath},\vec{\jmath})$

1.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} -x = -\infty$$

De même :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x\to-\infty} -x = +\infty$$

2. Pour tout $x \neq 1$ on a :

$$f'(x) = \frac{(-2x+2)(x+1)-(-x^2+2x+5)}{(x+1)^2} = \frac{-2x^2-2x+2x+2+x^2-2x-5}{(x+1)^2} = \frac{-x^2-2x-3}{(x+1)^2}$$

Comme $(x+1)^2 > 0$ pour $x \neq 1$, $f'(x)$ est du signe de $-x^2-2x-3$.
$\Delta = b^2-4ac = 4-12 = -8 < 0$, par conséquent $-x^2-2x-3 < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. D'où :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\infty$

3. (a)

$$ax+b+\frac{c}{x+1} = \frac{(ax+b)(x+1)+c}{x+1} = \frac{ax^2+ax+bx+b+c}{x+1} = \frac{ax^2+(a+b)x+b+c}{x+1}$$

En identifiant on obtient : $a = -1$ et donc $-1+b = 2 \Longleftrightarrow b = 3$ et enfin $3+c = 5 \Longleftrightarrow c = 2$, et donc au final pour $x \neq -1$ on a :

$$f(x) = -x+3+\frac{2}{x+1}$$

(b) On a pour $x \neq -1$:

$$f(x)-(-x+3) = \frac{2}{x+1}$$

et

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{x+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{x} = 0$$

Ainsi, la droite T : $y = -x+3$ est une asymptote oblique à $\mathscr{C}_f$ en $\pm\infty$.

(c) Etudier la postion de T et de $\mathscr{C}_f$ revient à étudier le signe de $f(x)-(-x+3)=\dfrac{2}{x+1}$ qui est du signe de $x+1$.
Ainsi si $x>-1$ alors $x+1>0 \iff f(x)-(-x+3)>0 \iff f(x)>-x+3$ et dans ce cas $\mathscr{C}_f$ est au dessus de T.
En revanche si $x<-1$ alors $x+1<0$ et donc $f(x)<-x+3$ et dans ce cas $\mathscr{C}_f$ est au dessous de T.

4. On a :
$$\lim_{x\to-1^+} -x+3=4 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-1^+} x+1=0^+ \Longrightarrow \lim_{x\to-1^+} \frac{2}{x+1}=+\infty$$
Et par conséquent :
$$\lim_{x\to-1^+} f(x)=+\infty$$
De même :
$$\lim_{x\to-1^-} -x+3=4 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-1^-} x+1=0^- \Longrightarrow \lim_{x\to-1^-} \frac{2}{x+1}=-\infty$$
Et par conséquent :
$$\lim_{x\to-1^-} f(x)=-\infty$$

5. On sait que l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en 0 est de la forme :
$$y=f'(0)(x-0)+f(0)$$
Or, $f'(0)=\dfrac{-3}{1}=-3$ et $f(0)=\dfrac{5}{1}$ et donc la tangente à $\mathscr{C}_f$ a pour équation :
$$y=-3x+5$$

<u>Exercice</u> 4. (5 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x)=\sin x-\frac{x}{2}$$
On souhaite résoudre l'équation (E) : $\sin x-\dfrac{x}{2}=0,\ x\in\mathbb{R}$.

1. Où l'on montre que les solutions de (E) sont dans l'intervalle $[-2;2]$.
   (a) On sait que pour tout $x\in\mathbb{R}$:
   $$\sin x\leq 1$$
   On a :
   $$x>2 \iff \frac{x}{2}>1 \iff -\frac{x}{2}<-1 \iff \sin x-\frac{x}{2}<\sin x-1 \iff f(x)<0$$
   Etant donné que pour $x>2$ on a $f(x)<0$, il est impossible que $f(x)=0$.
   (b) On sait que pour tout $x\in\mathbb{R}$:
   $$-1\leq\sin x$$
   $$x<-2 \iff \frac{x}{2}<-1 \iff -\frac{x}{2}>1 \iff \sin x-\frac{x}{2}>\sin x+1 \iff f(x)>0$$
   Etant donné que pour $x<-2$ on a $f(x)>0$, il est donc impossible que $f(x)=0$.
   (c) D'après les deux questions précédentes pour $x\notin[-2;2]$, $f(x)\neq 0$, par conséquent toutes les solutions de (E) sont dans l'intervalle $[-2;2]$.
2. Où l'on étudie la fonction f.
   (a) Pour $x\in[-\pi;\pi]$
   $$\cos x=\frac{1}{2} \iff x=-\frac{\pi}{3} \qquad \text{ou} \qquad x=\frac{\pi}{3}$$
   (b) Pour $x\in[-\pi;\pi]$ on a :
   $$f'(x)=\cos x-\frac{1}{2}$$

(c)

x	$-\pi$		$-\dfrac{\pi}{3}$		$\dfrac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\searrow$	$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\pi}{6}$	$\nearrow$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\pi}{6}$	$\searrow$	$-\dfrac{\pi}{2}$

3. Où l'on conclut.

   (a) La fonction f est continue sur $[-\pi;\pi]$, de plus elle est strictement décroissante sur $\left[-\pi;-\dfrac{\pi}{3}\right]$ en prenant des valeurs de $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\pi}{6}<0$ à $+\dfrac{\pi}{2}>0$, par conséquent d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x)=0$ admet une solution dans l'intervalle $\left[-\pi;-\dfrac{\pi}{3}\right]$.
   La fonction f est continue sur $[-\pi;\pi]$, de plus elle est strictement croissante sur $\left[-\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{3}\right]$ en prenant des valeurs de $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\pi}{6}<0$ à $\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\pi}{6}>0$, par conséquent d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x)=0$ admet une autre solution dans l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{3}\right]$.
   La fonction f est continue sur $[-\pi;\pi]$, de plus elle est strictement décroissante sur $\left[\dfrac{\pi}{3};\pi\right]$ en prenant des valeurs de $-\dfrac{\pi}{2}<0$ à $\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\pi}{6}>0$, par conséquent d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x)=0$ admet une autre solution dans l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{3}\right]$.
   Au final l'équation $f(x)=0$ admet exactement trois solutions dans l'intervalle $[-\pi;\pi]$.
   D'après la question 1. l'équation (E) n'admet aucune solution en dehors de l'intervalle $[-2;2]$ donc en particulier en dehors de l'intervalle $[-\pi;\pi]$.
   Ainsi (E) admet exactement trois solutions dans $\mathbb{R}$ (dont une est trivialement $x=0$).

   (b) A l'aide de la calculatrice on trouve que la plus grande solution α est :

$$\alpha \simeq 1,89$$

<u>Exercice</u> 5. (Bonus)

Etudier les variations de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\cos x+x$.
En déduire que l'équation $\cos x+x=0$ a une unique solution. En donner une valeur approchée à 10^{-3} près.

$$g'(x)=-\sin x+1$$

Comme $-1\leq \sin x\leq 1 \iff -1\leq -\sin x\leq 1 \iff 0\leq g'(x)\leq 2$.
Par conséquent la fonction g est croissante sur $\mathbb{R}$.
De plus :

$$-1\leq \cos x\leq 1 \iff -1+x\leq \cos x+x\leq 1+x$$

Ainsi comme $\lim\limits_{x\to-\infty} 1+x=-\infty$, on a par comparaison :

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$$

De même comme $\lim\limits_{x\to+\infty} -1+x=+\infty$, on a par comparaison :

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$$

D'où le tableau de variation complet de g :

x	$-\infty$		$+\infty$
			$+\infty$
$g(x)$		$\nearrow$	
	$-\infty$		

g est continue sur $\mathbb{R}$, monotone (strictement), en prenant toutes les valeurs possibles, le théorème des valeurs intermédiaires permet donc de conclure que $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ et notre calculatrice permet d'en donner une valeur approchée :

$$\alpha \simeq -0,74$$