Correction du devoir surveillé 2

On traitera les questions hors barème que dans le cas où l'ensemble du sujet est déjà traité.

Exercice 1. *R.O.C, France-juin 2005* (3 points)

On considère deux suites adjacentes (u_n) et (v_n) avec (u_n) croissante et (v_n) décroissante.
On suppose connus les résultats suivants :

- ➢ deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes lorsque : l'une est croissante, l'autre est décroissante et $u_n - v_n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$;
- ➢ si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes telles que (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante, alors pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, on a $u_n \leqslant v_n$;
- ➢ toute suite croissante et majorée est convergente ; toute suite décroissante et minorée est convergente.

On veut montrer la proposition suivante :

« Deux suites adjacentes sont convergentes et elles ont la même limite ».

1. La suite (u_n) est croissante par conséquent :
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq u_0$$
La suite (v_n) est décroissante par conséquent :
$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq v_0$$
De plus on sait que
$$u_n \leq v_n, \forall n \in \mathbb{N}$$
Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$
2. Comme (u_n) est croissante et majorée par v_0, (u_n) est une suite converge. On note ℓ sa limite.
3. Comme (v_n) est décroissante et minorée par u_0, alors (v_n) converge. On note ℓ' sa limite.
4. Comme $u_n - v_n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ alors $\ell - \ell' = 0 \Longleftrightarrow \ell = \ell'$.

Exercice 2. *Antilles 2010* (7 points)

On considère la suite de nombres réels (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = -1,\ u_1 = \frac{1}{2} \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n.$$

1. $u_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.
De plus $u_2 - u_1 = \frac{1}{4} \neq \frac{3}{2} = u_1 - u_0$, par conséquent la suite (u_n) est arithmétique.
Enfin $\frac{u_2}{u_1} = \frac{3}{2} \neq \frac{u_1}{u_0} = -\frac{1}{2}$, par conséquent la suite (u_n) n'est pas non plus géométrique.
2. On définit la suite (v_n) en posant, pour tout entier naturel n : $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$.
   (a) Calculer $v_0 = u_1 - \frac{1}{2}u_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.
   (b)
$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+2} - \frac{1}{2}u_{n+1} \\ &= u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n - \frac{1}{2}u_{n+1} \\ &= \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n \\ &= \frac{1}{2}(u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n) \\ &= \frac{1}{2}v_n \end{aligned}$$

(c) Comme $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$ la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

(d) Par conséquent $v_n = \frac{1}{2^n}$

3. On définit la suite (w_n) en posant, pour tout entier naturel n :

$$w_n = \frac{u_n}{v_n}.$$

(a) Calculer $w_0 = \frac{u_0}{v_0} = \frac{-1}{1} = -1$.

(b) En utilisant l'égalité $u_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}u_n$ et le résultat de la question 2.(b), on a :

$$w_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} = \frac{v_n + \frac{1}{2}u_n}{\frac{1}{2}v_n} = 2 + \frac{u_n}{v_n}$$

(c) Comme $w_{n+1} = 2 + w_n$, (w_n) est une suite arithmétique de raison 2.

(d) Par conséquent $w_n = w_0 + nr = -1 + 2n$.

4. Pour tout entier naturel n

$$u_n = v_n \times w_n = \frac{1}{2^n} \times (2n-1) = \frac{2n-1}{2^n}$$

5. Pour tout entier naturel n, on pose : $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$. Notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété :

$$S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}.$$

– *Initialisation* : $S_0 = u_0 = -1$ et $2 - \frac{2\times 0+3}{2^0} = -1$ donc la propriété $\mathscr{P}$ est vraie pour $n = 0$, par conséquent elle est initialisée.

– *Hérédité* Supposons que $\mathscr{P}$ soit vraie pour un certain n, montrons que $\mathscr{P}$ est vraie au rang $n+1$. On veut donc montrer que :

$$S_{n+1} = 2 - \frac{2(n+1)+3}{2^{n+1}}$$

On a :

$$S_{n+1} = S_n + u_{n+1} = 2 - \frac{2n+3}{2^n} + \frac{2(n+1)-1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{4n+6}{2^{n+1}} + \frac{2n+1}{2^{n+1}} = 2 + \frac{2n+1-4n-6}{2^{n+1}} = 2 - \frac{4n+6-2n-1}{2^{n+1}}$$

$$S_{n+1} = 2 - \frac{2(n+1)+3}{2^{n+1}}$$

Par conséquent la propriété $\mathscr{P}$ est vraie au rang $n+1$, et donc on a pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$$

Exercice 3. ***Métropole Septembre 2010*** (5 points (+2))

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et pour tout nombre entier naturel n, par

$$u_{n+1} = \frac{4u_n - 1}{u_n + 2}$$

Si f est la fonction définie sur l'intervalle $]-2\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \frac{4x-1}{x+2}$, alors on a, $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = f(u_n)$.

On donne en annexe une partie de la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f ainsi que la droite Δ d'équation $y = x$.

1. (a) Cf. Annexe
   (b) La suite (u_n) semble décroissante et convergente vers 1.
2. (a) Notons $\mathscr{P}(n)$: $u_n - 1 > 0$.
   – *Initialisation* : $u_0 - 1 = 4 > 0$, par conséquent la propriété $\mathscr{P}$ est vraie au rang 0.
   – *Hérédité* : Supposons que la propriété $\mathscr{P}$ soit vraie pour un certain n et montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$.
   D'après l'hypothèse de récurrence on a :
   $$u_n - 1 > 0 \Longleftrightarrow u_n > 1$$
   De plus :
   $$u_{n+1} - 1 = \frac{4u_n - 1}{u_n + 2} - 1 = \frac{4u_n - 1 - u_n - 2}{u_n + 2} = \frac{3u_n - 3}{u_n + 2} = \frac{3(u_n - 1)}{u_n + 2} > 0$$
   En effet $u_n - 1 > 0 \Longleftrightarrow 3(u_n - 1) > 0$, et $u_n > 1 \Longleftrightarrow u_n + 2 > 3$
   Ainsi, la propriété $\mathscr{P}$ est vraie au rang $n+1$ ce qui prouve que pour tout entier naturel n on a
   $$u_n - 1 > 0 \Longleftrightarrow u_n > 1$$
   La suite (u_n) est donc minorée par 1.

   (b) i. Pour tout $x \in]-2;+\infty[$ on a :
   $$f'(x) = \frac{4(x+2) - (4x-1)}{(x+2)^2} = \frac{9}{(x+2)^2} > 0$$
   donc f est une fonction strictement croissante sur $]-2;+\infty[$.

   ii. En déduire, par un raisonnement par récurrence, que la suite (u_n) est strictement décroissante.
   Montrons la propriété $\mathscr{P}(n)$: $1 < u_{n+1} < u_n$
   – *Initialisation* : $1 < u_1 = \dfrac{19}{7} < u_0$ par conséquent la propriété $\mathscr{P}$ est vraie au rang 0.
   – *Hérédité* : Supposons que la propriété $\mathscr{P}$ soit vraie pour un certain n et montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$.
   D'après l'hypothèse de récurrence on a :
   $$\begin{array}{rc} & 1 < u_{n+1} < u_n \\ \Longleftrightarrow & f(1) < f(u_{n+1}) < f(u_n) \\ \Longleftrightarrow & 1 < u_{n+2} < u_{n+1} \end{array}$$
   Ce qui prouve la propriété $\mathscr{P}$ au rang $n+1$. Ainsi la suite (u_n) est strictement décroissante.

   iii. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 1 donc elle converge. On note ℓ sa limite.

   iv. Comme $displaystyle \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$ et $displaystyle \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$, on a :
   $$\ell = \frac{4\ell - 1}{\ell + 2} \Longleftrightarrow \ell^2 + 2\ell = 4\ell - 1 \Longleftrightarrow \ell^2 - 2\ell + 1 = 0 \Longleftrightarrow (\ell - 1)^2 = 0 \Longleftrightarrow \ell = 1$$
3. **(Hors Barème)** Dans cette question, on se propose d'étudier la suite (u_n) par une autre méthode, en déterminant une expression de u_n en fonction de n.
   Pour tout nombre entier naturel n, on pose $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$.

(a)

$$\begin{aligned}
v_{n+1}-v_n &= \frac{1}{u_{n+1}-1}-\frac{1}{u_n-1}\\
&= \frac{1}{\dfrac{4u_n-1}{u_n+2}-1}-\frac{1}{u_n-1}\\
&= \frac{1}{\dfrac{4u_n-1-u_n-2}{u_n+2}}-\frac{1}{u_n-1}\\
&= \frac{u_n+2}{3u_n-3}-\frac{1}{u_n-1}\\
&= \frac{u_n+2-3}{3u_n-3}\\
&= \frac{u_n-1}{3(u_n-1)}\\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Ainsi (v_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{1}{3}$

(b) Pour tout nombre entier naturel n on a, puisque (v_n) est arithmétique avec $\frac{1}{3}$ pour raison :

$$v_n = v_0 + nr = \frac{1}{4}+\frac{1}{3}n$$

Par suite, comme $v_n=\dfrac{1}{u_n-1} \iff v_n(u_n-1)=1 \iff u_n=\dfrac{1}{v_n}+1$ on a :

$$u_n = \frac{1}{\frac{1}{4}+\frac{1}{3}n}+1=\frac{12}{3+4n}+1$$

.

(c) Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} 3+4n=+\infty$ on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{12}{3+4n}=0 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = 1$$

Exercice 4. (**Liban 2009**) (5 points (+2))

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique : 2 cm).
On considère les points A, B et C d' affixes respectives :

$$z_{\mathrm{A}} = -\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\ z_B=\overline{z_A} \text{ et } z_C=-3.$$

1. (a) Calculer le module du nombre complexe z_A :

$$\mid z_A \mid = \sqrt{\frac{9}{4}+\frac{3}{4}}=\sqrt{\frac{12}{4}}=\sqrt{3}$$

Par conséquent la forme trigonométrique de z_A est de la forme :

$$z_A=\sqrt{3}(\cos\theta+i\sin\theta) \qquad \text{avec } \theta = arg(z_A)[2\pi]$$

On a :

$$\sqrt{3}\cos\theta = -\frac{3}{2} \Longleftrightarrow \cos\theta = -\frac{3}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sqrt{3}\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \Longleftrightarrow \sin\theta = \frac{1}{2}$$

Par conséquent $\theta = \frac{5\pi}{6}[2\pi]$. La forme exponentielle de z_A est donc :

$$\boxed{z_A = \sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}}$$

Par conséquent :

$$\boxed{z_B = \overline{z_A} = \overline{\sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}} = \sqrt{3}e^{-i\frac{5\pi}{6}}}$$

Ecrire les nombres complexes z_A et z_B sous forme exponentielle.

(b) Cf. Figure en fin de corrigé.

(c) Montrons que $AB = AC = BC$.

$$AB = \mid z_{\overleftarrow{AB}} \mid = \mid z_B - z_A \mid = \mid -\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \mid = \mid \sqrt{3}i \mid = \sqrt{3}$$

De même

$$AC = \mid z_{\overrightarrow{AC}} \mid = \mid -3 + \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \mid = \mid -\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \mid = \mid z_B \mid = \sqrt{3}$$

Enfin

$$BC = \mid z_{\overrightarrow{BC}} \mid = \mid z_B - z_C \mid = \mid -\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} + 3 \mid = \mid \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \mid = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{3}$$

On a donc $AB = AC = BC = \sqrt{3}$ ce qui prouve que le triangle ABC est équilatéral.

2. Soit f l'application qui, à tout point M du plan d'affixe z, associe le point M' d'affixe $z' = \frac{1}{3}iz^2$.
On note O', A', B' et C' les points respectivement associés par f aux points O, A, B et C.

(a) i. On remarque que :

$$i = 0 + 1i = \cos\frac{\pi}{2} + i\frac{\pi}{2} = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

Par conséquent :

$$z_{A'} = \frac{1}{3}e^{i\frac{\pi}{2}}z_A^2 = \frac{1}{3}e^{i\frac{\pi}{2}} \times \left(\sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)^2 = \frac{1}{3} \times e^{i\frac{\pi}{2}} \times 3e^{i\frac{10\pi}{6}} = e^{i\frac{3\pi+10\pi}{6}} = e^{i\frac{13\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{6}}$$

Le nombre complexe $z_{A'}$ a donc pour module 1 et pour argument $\frac{\pi}{6}$.
De plus :

$$z_{B'} = \frac{1}{3}e^{i\frac{\pi}{2}}z_B^2 = \frac{1}{3}e^{i\frac{\pi}{2}} \times \left(\sqrt{3}e^{-i\frac{5\pi}{6}}\right)^2 = \frac{1}{3} \times e^{i\frac{\pi}{2}} \times 3e^{-i\frac{10\pi}{6}} = e^{i\frac{3\pi-10\pi}{6}} = e^{-i\frac{7\pi}{6}} = e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

Le nombre complexe $z_{B'}$ a donc pour module 1 et pour argument $\frac{5\pi}{6}$.
Et enfin :

$$z_{C'} = \frac{1}{3}e^{i\frac{\pi}{2}}z_C^2 = \frac{1}{3}e^{i\frac{\pi}{2}} \times 9 = 3e^{i\frac{\pi}{2}}$$

Le nombre complexe $z_{C'}$ a donc pour module 3 et pour argument $\frac{\pi}{2}$.

ii. Cf. Figure en fin de corrigé.

iii. On a :

$$arg(z_A)[2\pi] = \frac{5\pi}{6}[2\pi] = arg(z_{B'}[2\pi]$$

Par conséquent les points O, A et B' sont alignés.
De plus on a :

$$arg(z_B) + \pi[2\pi] = -\frac{5\pi}{6} + \pi[2\pi] = \frac{-5\pi + 6\pi}{6}[2\pi] = \frac{\pi}{6}[2\pi] = arg(z_{A'})[2\pi]$$

Par conséquent les points O, A' et B sont alignés.

(b) Soit G l'isobarycentre des points O, A, B et C. On note G' le point associé à G par f.

i. On a :

$$z_G = \frac{z_O + z_A + z_B + z_C}{4} = \frac{0 - \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} - 3}{4} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$$

Par conséquent

$$z_{G'} = \frac{1}{3}iz_G^2 = \frac{1}{3}i \times \frac{9}{4} = \frac{3}{4}i$$

ii. **(Hors Barème)** Calculons l'affixe z de l'isobarycentre des points O' A', B' et C' :

$$z = \frac{z_O + z_{A'} + z_{B'} + z_{C'}}{4} = \frac{0 + e^{i\frac{\pi}{6}} + e^{i\frac{5\pi}{6}} + 3e^{i\frac{\pi}{2}}}{4} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} + 3i}{4} = \frac{4i}{4} = i$$

$z \neq z_{G'}$, par conséquent G' n'est pas l'isobarycentre des points O, A', B' et C'.

(c) **(Hors Barème)** La droite (AB) a pour équation $x = -\frac{3}{2}$, par conséquent si $M \in (AB)$ alors

$$\boxed{M\left(-\frac{3}{2}; y_M\right)}$$

On veut montrer que M' appartient à la parabole d'équation $y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{3}{4}$ i.e que

$$\boxed{M'\left(x_{M'}; -\frac{1}{3}x_{M'}^2 + \frac{3}{4}\right)}$$

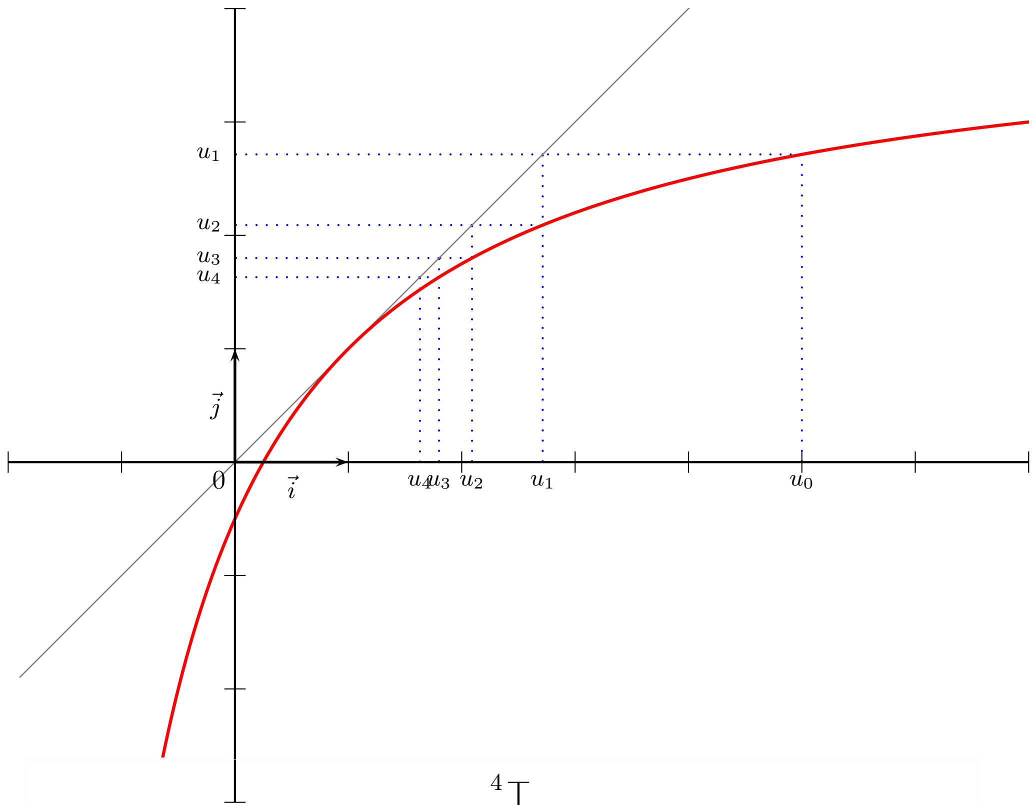
Notons z_M l'affixe de M, on a alors $z_M = -\frac{3}{2} + iy_M$, on cherche à montrer que

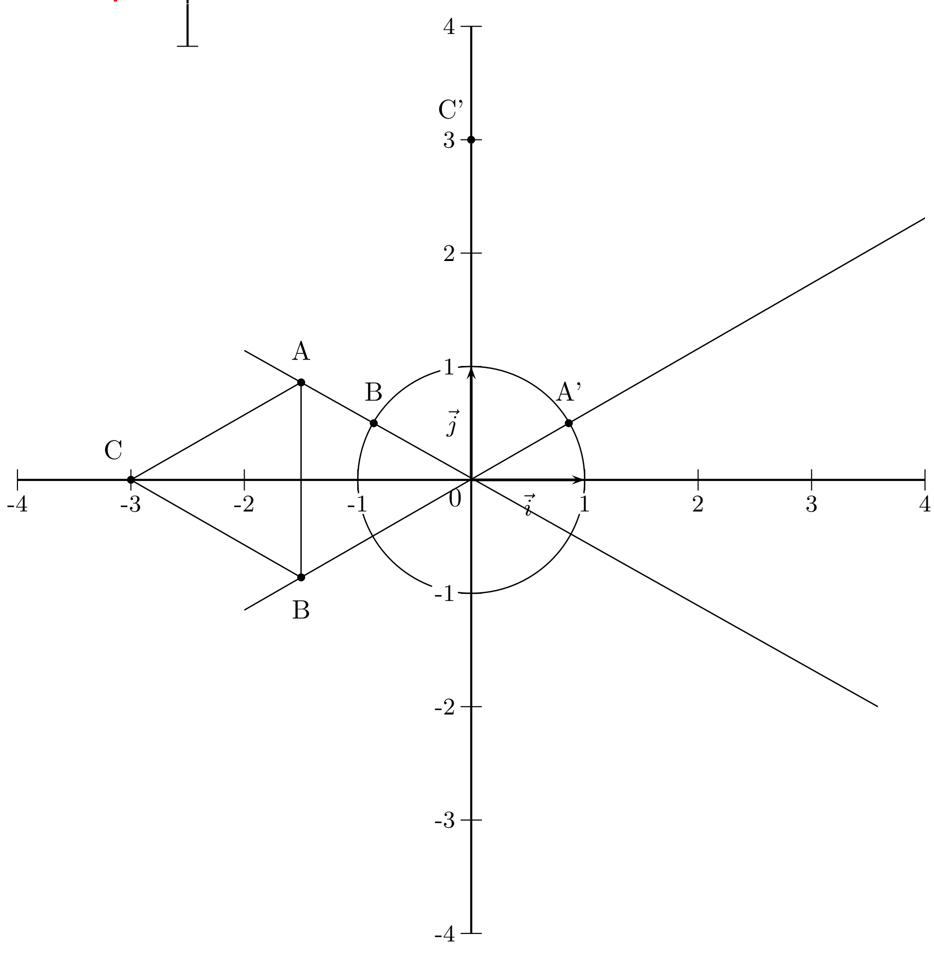
$$z_{M'} = x_{M'} + i(-\frac{1}{3}x_{M'}^2 + \frac{3}{4})$$

Or :

$$z_{M'} = \frac{1}{3}iz_M^2 = \frac{1}{3}i\left(-\frac{3}{2} + iy_M\right)^2 = \frac{1}{3}i\left(\frac{9}{4} - 3iy_M - y_M^2\right) = y_M + i\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{3}y_M^2\right)$$

CQFD en notant $y_M = x_{M'}$.


u_1
u_2
u_3
u_4
$\vec{j}$
0
$\vec{i}$
u_4
u_3
u_2
u_1
u_0


4
C'
3
2
1
A
B
A'
$\vec{j}$
C
-4
-3
-2
-1
0
$\vec{i}$
1
2
3
4
-1
B
-2
-3
-4