Correction du devoir Surveillé 1

Exercice 1. ***R.O.C*** (3 points)

1. Démontrer qu'un nombre complexe z est imaginaire pur si et seulement si $\overline{z} = -z$.
2. Démontrer qu'un nombre complexe z est réel si et seulement si $\overline{z} = z$.
3. Démontrer que pour tout nombre complexe z, on a l'égalité : $z\overline{z} = |z|^2$.

Preuve

1. et 2. Notons $z = x + iy$ avec x et y deux réels. Ainsi :

$$z + \overline{z} = x + iy + x - iy = 2x = 2\Re e(z) \text{ et } z - \overline{z} = x + iy - (x - iy) = 2iy = 2i\Im m(z)$$

On en déduit immédiatement que :

$$z \text{ est réel} \Longleftrightarrow \Im m(z) = 0 \Longleftrightarrow z - \overline{z} = 0 \Longleftrightarrow z = \overline{z}$$

$$z \text{ est imaginaire pur} \Longleftrightarrow \Re e(z) = 0 \Longleftrightarrow z + \overline{z} = 0 \Longleftrightarrow z = -\overline{z}$$

2. $z\overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - ixy + ixy - i^2y = x^2 + y^2 = |z|^2$

Exercice 2. (3 points)

On considère dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation (E) d'inconnue z suivante :

$$z^3 + (-8 + i)z^2 + (17 - 8i)z + 17i = 0$$

1. $(-i)^3 + (-8 + i)(-i)^2 + (17 - 8i)(-i) + 17i = i + 8 - i - 17i - 8 + 17i = 0$
2. On a :
$$(z + i)(az^2 + bz + c) = az^3 + (ai + b) + (c + ib)z + ic$$
On a donc par identification : $a = 1$, $ai+b = i-8 \Longleftrightarrow b = -8$, $17-8i = c+ib \Longleftrightarrow c = 17$ et $ic = 17i \Longleftrightarrow c = 17$
3. On a :

$$\begin{array}{rc} & z^3 + (-8 + i)z^2 + (17 - 8i)z + 17i = 0 \\ \Longleftrightarrow & (z + i)(z^2 - 8z + 17) = 0 \\ \Longleftrightarrow & z + i = 0 \quad \text{ou} \quad z^2 - 8z + 17 = 0 \\ \Longleftrightarrow & z = -i \quad \text{ou} \quad z = \dfrac{8 - i\sqrt{4}}{2} = 4 - i \quad \text{ou} \quad z = 4 + i \end{array}$$

Exercice 3. 2007 (6 points)

Soit les nombres complexes : $z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$ $\quad z_2 = 2 + 2i$ $\quad Z = \dfrac{z_1}{z_2}$

1. $Z = \dfrac{\sqrt{2} + i\sqrt{6}}{2 + 2i} = \dfrac{(\sqrt{2} + i\sqrt{6})(2 - 2i)}{(2 + 2i)(2 - 2i)} = \dfrac{2\sqrt{2} + 2i\sqrt{6} - 2i\sqrt{2} + 2\sqrt{6}}{8} = \dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} + i\dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$
2. Or $z_1 = 2\sqrt{2}(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ où $\theta_1 = arg(z_1)$, par conséquent :

$$\cos\theta_1 = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin\theta_1 = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ce qui prouve que $\theta_1 = \dfrac{\pi}{3}[2\pi]$.
De la même manière $| z_2 |= \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

$z_2 = 2\sqrt{2}(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ où $\theta_2 = arg(z_2)$, par conséquent :

$$\cos\theta_2 = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin\theta_2 = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ce qui prouve que $\theta_2 = \dfrac{\pi}{4}[2\pi]$.
On obtient au final :

$$\mid Z \mid = \frac{\mid z_1 \mid}{\mid z_2 \mid} = 1$$

et

$$arg(Z) = arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)[2\pi] = arg(z_1) - arg(z_2)[2\pi] = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}[2\pi] = \frac{\pi}{12}[2\pi]$$

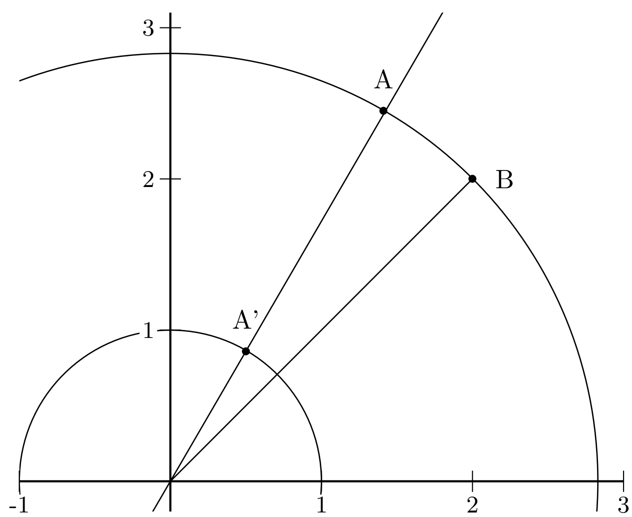
3. D'après la question précédente

$$Z = \cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}$$

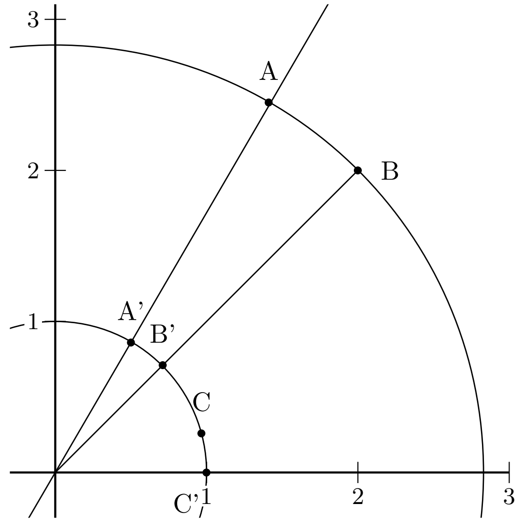
et donc d'après la question 1. on a :

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \qquad \text{et} \qquad \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

4. Le plan est muni d'un repère orthonormal ; on prendra 2 cm comme unité graphique. On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives z_1, z_2 et Z.
   (a) On commence par placer B, puis comme le module de z_1 et de z_2 sont identiques on sait que le point A se trouvent sur le cercle de centre O passant par B, que l'on trace. Enfin on connait l'argument de z_1 qu'il faut exploiter. Pour cela on trace le cercle trigonométrique et on place le point A' qui a pour module 1 et pour argument $\dfrac{\pi}{3}$ à l'aide de son abscisse qui vaut $\dfrac{1}{2}$.
   Il ne reste plus qu'à prolonger (OA') pour obtenir le point A comme intersection entre cette droite et le premier cercle construit.



   (b) On sait que le point C est sur le cercle trigonométrique, puisque le module de Z vaut 1. Il faut encore parvenir à construire un angle de $\dfrac{\pi}{12}$. Pour cela on remarque que l'angle entre les demi-droites $[OB)$ et $[OA)$ vaut lui aussi $\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{12}$. On reproduit la distance $A'B'$ en partant de C', ainsi on trouve le point C.



5. On a
$$Z^{2010} = \left(e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^{2010} = e^{i\frac{2010\pi}{12}} = e^{i\frac{335\pi}{2}} = e^{-i\frac{\pi}{2}} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right) = 0 - i = -i$$
.

<u>Exercice</u> 4. 2005 (5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ (unité graphique : 8 cm).
On appelle A le point d'affixe -1 et B le point d'affixe 1
Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des points du plan distincts de A, O et B.
A tout point M d'affixe z appartenant à l'ensemble $\mathscr{E}$, on associe le point N d'affixe z^2 et le point P d'affixe z^3.

1. Si $M = N$ alors $z = z^2 \iff z - z^2 = 0 \iff z(1-z) = 0 \iff z = 0$ ou $1 = z$, or on suppose le contraire donc $M \neq N$.
   De même si $M = P$ alors $z = z^3 \iff z - z^3 = 0 \iff z(1-z^2) = 0 \iff z = 0$ ou $z^2 = 1 \iff z = 0$ ou $z = 1$ ou $z = -1$, or on suppose le contraire donc $M \neq P$.
   Et enfin si $N = P$ alors $z^2 = z^3 \iff z^2(1-z) = 00 \iff z = 0$ ou $1 = z$, or on suppose le contraire donc $P \neq N$.
   Ainsi les points M, N et P sont deux à deux distincts.
2. On se propose de déterminer l'ensemble $\mathscr{C}$ des points M appartenant à $\mathscr{E}$ tels que le triangle MNP soit rectangle en P.
   (a) On a :
   $$MN = \mid z_N - z_M \mid = \mid z^2 - z \mid = \mid z(z-1) \mid = \mid z \mid\mid z-1 \mid$$
   mais aussi
   $$MP = \mid z_P - z_M \mid = \mid z^3 - z \mid = \mid z(z^2-1) \mid = \mid z \mid\mid (z-1)(z+1) \mid = \mid z \mid\mid z-1 \mid\mid z+1 \mid$$
   Et enfin
   $$NP = \mid z_P - z_N \mid = \mid z^3 - z^2 \mid = \mid z^2(z-1) \mid = \mid z^2 \mid\mid z-1 \mid = \mid z \mid^2 \mid z-1 \mid$$
   D'après le théorème de Pythagore ; le triangle MNP est rectangle en P si, et seulement si,
   $$PN^2 + PM^2 = MN^2 \iff \mid z \mid^4 \mid z-1 \mid^2 + \mid z \mid^2 \mid z-1 \mid^2 \mid z+1 \mid^2 = \mid z \mid^2 \mid z-1 \mid^2$$
   En divisant le tout par $\mid z \mid^2 \mid z-1 \mid^2 \neq 0$, on obtient, MNP est rectangle en P si, et seulement si,
   $$\mid z \mid^2 + \mid z+1 \mid^2 = 1$$
   (b) Démontrons que $|z+1|^2 + |z|^2 = 1 \iff \left(z + \frac{1}{2}\right)\overline{\left(z + \frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{4}$.

On a d'une part :

$$\begin{aligned}
& \left(z+\frac{1}{2}\right)\overline{\left(z+\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{4} \\
\iff\quad & \left(z+\frac{1}{2}\right)\left(\overline{z}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4} \\
\iff\quad & z\overline{z}+\frac{1}{2}(z+\overline{z})+\frac{1}{4}=\frac{1}{4} \\
\iff\quad & z\overline{z}+\frac{1}{2}(z+\overline{z})=0
\end{aligned}$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned}
& |z+1|^2+|z|^2=1 \\
\iff\quad & (z+1)\overline{(z+1)}+z\overline{z}=1 \\
\iff\quad & (z+1)(\overline{z}+1)+z\overline{z}=1 \\
\iff\quad & z\overline{z}+z+\overline{z}+1+z\overline{z}=1 \\
\iff\quad & 2z\overline{z}+z+\overline{z}=0 \\
\iff\quad & z\overline{z}+\frac{1}{2}(z+\overline{z})=0
\end{aligned}$$

ce qui prouve que $|z+1|^2+|z|^2=1 \iff \left(z+\frac{1}{2}\right)\overline{\left(z+\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{4}$.

(c) On cherche l'ensemble des points M appartenant à $\mathscr{E}$ du plan tels que MNP est rectangle en P i.e tels que

$$\begin{aligned}
& \left(z+\frac{1}{2}\right)\overline{\left(z+\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{4} \\
\iff\quad & \mid z+\frac{1}{2}\mid^2=\frac{1}{4} \\
\iff\quad & \mid z+\frac{1}{2}\mid=\frac{1}{2} \quad \text{un module étant toujours positif} \\
\iff\quad & \mid z-z_E\mid=\frac{1}{2} \quad \text{où } z_E=-\frac{1}{2} \text{ est l'affixe du point } E \\
\iff\quad & \mid z_{\overrightarrow{EM}}\mid=\frac{1}{2} \\
\iff\quad & EM=\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$\mathscr{C}$ est donc le cercle de centre E et de rayon $\frac{1}{2}$ privé (éventuellement) des points A, O et B. Les points A et O appartiennent aux cercle trouvés, donc l'ensemble $\mathscr{C}$ est le cercle de E privé des points A et O.