BACCALAUREAT GENERAL GRIS CLAIR

SESSION 2011

MATHEMATIQUES

Série : **S**

DUREE DE L'EPREUVE : **4 Heures**. COEFFICIENT : **7**.

Ce sujet comporte 3 pages numérotées de 1 à 3.

L'utilisation de la calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter tous les exercices.

Il est invité à faire sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développé. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Bac gris clair

Exercice 1. (5 points)

Cet exercice contient une restitution organisée de connaissances.

Partie A

On suppose connus les résultats suivants :

1. Dans le plan complexe, on donne par leurs affixes $z_A,\ z_B$ et z_C trois points $A,\ B$ et C.
   Alors $\left|\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right| = \dfrac{CB}{CA}$ et $\arg\left(\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = \left(\overrightarrow{CA},\ \overrightarrow{CB}\right) \quad (2\pi)$.
2. Soit z un nombre complexe et soit θ un réel :
   $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ si et seulement si $|z| = 1$ et $\arg(z) = \theta + 2k\pi$, où k est un entier relatif.

Démonstration de cours : démontrer que la rotation r d'angle α et de centre Ω d'affixe ω est la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que

$$z' - \omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}(z - \omega).$$

Partie B

Dans un repère orthonormal direct du plan complexe $(O;\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 2 cm, on considère les points $A,\ B,\ C$ et D d'affixes respectives

$$z_A = -\sqrt{3} - \mathrm{i},\ z_B = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3},\ z_C = \sqrt{3} + \mathrm{i} \text{ et } z_D = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}.$$

1. (a) Donner le module et un argument pour, chacun des quatre nombres complexes $z_A,\ z_B,\ z_C$ et z_D.
   (b) Comment construire à la règle et au compas les points $A,\ B,\ C$ et D dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$?
   (c) Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?
2. On considère la rotation r de centre B et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$. Soient E et F les points du plan définis par : $E = r(A)$ et $F = r(C)$.
   (a) Comment construire à la règle et au compas les points F et E dans le repère précédent ?
   (b) Donner l'écriture complexe de r.
   (c) Déterminer l'affixe du point E.

Exercice 2. (5 points)

Soit φ la fonction définie sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$ par

$$\varphi(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x.$$

1. (a) Etudier le sens de variation de la fonction φ sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$.
   (b) Calculer $\varphi(\mathrm{e})$. Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[1\,;\,\mathrm{e}]$. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.
   (c) Déterminer le signe de $\varphi(x)$ suivant les valeurs de x.
2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln x}{1 + x^2}.$$

   On note f' la fonction dérivée de f.
   (a) Calculer $f'(x)$ et montrer que pour tout $x \geqslant 1$ on a : $f'(x) = \dfrac{\varphi(x)}{x\left(1 + x^2\right)^2}$.
   (b) Déduire de la question 1. le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$.
   (c) Démontrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$ on a :

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{\ln x}{x^2}.$$

(d) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3. (a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x = 1 - \frac{2}{\mathrm{e}}$.

   (b) On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f, dans un repère orthonormé $(0;\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 1 cm. Soit $\mathscr{A}$ l'aire exprimée en cm^2 du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$.
   Déterminer un encadrement de $\mathscr{A}$.

Exercice 3. (5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{9}{2}\mathrm{e}^{-2x} - 3\mathrm{e}^{-3x}.$$

Partie A :

Soit l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = 3\mathrm{e}^{-3x}$.

1. Résoudre l'équation différentielle (E$'$) : $y' + 2y = 0$.
2. En déduire que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \dfrac{9}{2}\mathrm{e}^{-2x}$ est solution de (E$'$).
3. Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -3\mathrm{e}^{-3x}$ est solution de l'équation (E).
4. En remarquant que $f = g + h$, montrer que f est une solution de (E).

Partie B :

On nomme $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité 1 cm.

1. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$ on a : $f(x) = 3\mathrm{e}^{-2x}\left(\dfrac{3}{2} - \mathrm{e}^{-x}\right)$.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$ puis la limite de f en $-\infty$.
3. Etudier les variations de la fonction f et dresser le tableau de variations de f.
4. Calculer les coordonnées des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec les axes du repère.
5. Calculer $f(1)$ et tracer l'allure de la courbe $\mathscr{C}_f$.
6. Déterminer l'aire $\mathscr{A}$ de la partie du plan délimitée par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$. On exprimera cette aire en cm^2.

Exercice 4. (6 points)

L'objectif de l'exercice est l'étude d'une fonction et d'une suite liée à cette fonction

PARTIE A

On note f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}.$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$. L'unité graphique est 1 cm.

1. Etude des limites
   (a) Déterminer la limite de la fonction f quand x tend vers 0.
   (b) Déterminer la limite de la fonction f quand x tend vers $+\infty$.
   (c) Quelles conséquences peut-on déduire de ces deux résultats, pour la courbe $\mathcal{C}$?
2. Etude des variations de la fonction f
   (a) Démontrer que, la fonction dérivée de la fonction f s'exprime, pour tout réel x strictement positif, par :

$$f'(x) = -\frac{1}{x^4}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}(2x + 1).$$

(b) Déterminer le signe de f' et en déduire le tableau de variation de f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

(c) Démontrer que l'équation $f(x) = 2$ a une unique solution notée α appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ et donner la valeur approchée de α arrondie au centième.

3. Tracer la courbe $\mathcal{C}$ dans le repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

PARTIE B : Etude d'une suite d'intégrales

Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$ on considère l'intégrale I_n définie par :

$$I_n = \int_1^2 \frac{1}{x^n}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x.$$

1. Calculer I_2.
2. Une relation de récurrence

(a) Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$:

$$I_{n+1} = \mathrm{e} - \frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{2^{n-1}} + (1-n)I_n.$$

(b) Calculer I_3.

3. Etude de la limite de la suite de terme général I_n

(a) Etablir que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[1\,;\,2]$, on a :

$$0 \leqslant \frac{1}{x^n}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \leqslant \frac{\mathrm{e}}{x^n}$$

(b) En déduire un encadrement de I_n puis étudier la limite éventuelle de la suite (I_n).