BACCALAUREAT GENERAL BLEU

SESSION 2011

MATHEMATIQUES-SPECIALISTE et NON SPECIALISTE

Série : **S**

DUREE DE L'EPREUVE : **4 Heures**. COEFFICIENT : **7** ou **9**.

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5.

L'utilisation de la calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter tous les exercices.

Il est invité à faire sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développé. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

BAC BLEU

Exercice 1. (3 points)

Pour chacune des trois questions, une seule des quatre propositions est exacte.
Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie, sans justification.
Il sera attribué un point si la réponse est exacte, zéro sinon.

1. On désigne par A et B deux événements indépendants d'un univers muni d'une loi de probabilité p.
   On sait que $p(A \cup B) = \dfrac{4}{5}$ et $p\left(\overline{A}\right) = \dfrac{3}{5}$.
   La probabilité de l'événement B est égale à :

   (a) $\dfrac{2}{5}$ (b) $\dfrac{2}{3}$ (c) $\dfrac{3}{5}$ (d) $\dfrac{1}{2}$

2. On note X une variable aléatoire continue qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,04$.
   On rappelle que pour tout réel t positif, la probabilité de l'événement $(X \leqslant t)$, notée $p(X \leqslant t)$, est donnée par $p(X \leqslant t) = \displaystyle\int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\, \mathrm{d}x$.
   La valeur approchée de $p(X > 5)$ à 10^{-2} près par excès est égale à :

   (a) $0,91$ (b) $0,18$ (c) $0,19$ (d) $0,82$

3. Dans ma rue, il pleut un soir sur quatre.
   S'il pleut, je sors mon chien avec une probabilité égale à $\dfrac{1}{10}$; s'il ne pleut pas, je sors mon chien avec une probabilité égale à $\dfrac{9}{10}$.
   Je sors mon chien ; la probabilité qu'il ne pleuve pas est égale à :

   (a) $\dfrac{9}{10}$ (b) $\dfrac{27}{40}$ (c) $\dfrac{3}{4}$ (d) $\dfrac{27}{28}$

Exercice 2. (5 points)

Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.
$(O; \vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormal direct du plan complexe.
Soit A le point d'affixe $1 + \mathrm{i}$.
Au point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' telle que

$$z' = \frac{1}{2}\left(z + \mathrm{i}\overline{z}\right).$$

1. On pose $z = x + \mathrm{i}y$ et $z' = x' + \mathrm{i}y'$ avec x, y, x' et y' réels.
   (a) Démontrer les égalités suivantes : $x' = \dfrac{1}{2}(x+y)$ et $y' = \dfrac{1}{2}(x+y)$. En déduire que le point M' appartient à la droite $(\mathrm{O}A)$.
   (b) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $M = M'$.
   (c) Démontrer que pour tout point M du plan les vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{\mathrm{O}A}$ sont orthogonaux.
2. Soit r la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. M_1 est le point d'affixe z_1 image de M par r, M_2 le point d'affixe $z_2 = \overline{z}$, M_3 le point d'affixe z_3 tel que le quadrilatère $\mathrm{O}M_1M_3M_2$ soit un parallélogramme.
   (a) Dans cette question uniquement M a pour affixe $4 + \mathrm{i}$, placer les points M, M_1, M_2, M_3.
   (b) Exprimer z_1 en fonction de z, puis z_3 en fonction de z.
   (c) $OM_1M_3M_2$ est-il un losange ? Justifier.

(d) Vérifier que $z' - z = \frac{1}{2} i z_3$.
En déduire que $MM' = \frac{1}{2}\mathrm{O}M_3$.

3. Démontrer que les points M, M_1, M_2 e tM_3 appartiennent à un même cercle de centre O si et seulement si $MM' = \frac{1}{2}\mathrm{O}M$.
Donner alors la mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{M'\mathrm{O}M}$.

Exercice 2. (5 points)
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité
Rappel :
Pour deux entiers relatifs a et b, on dit que a est congru à b modulo 7, et on écrit $a \equiv b \mod 7$ lorsqu'il existe un entier relatif k tel que $a = b + 7k$.

1. *Cette question constitue une restitution organisée de connaissances*
   (a) Soient a, b, c et d des entiers relatifs.
   Démontrer que : si $a \equiv b \mod 7$ et $c \equiv d \mod 7$ alors $ac \equiv bd \mod 7$.
   (b) En déduire que : pour a et b entiers relatifs non nuls
   si $a \equiv b \mod 7$ alors pour tout entier naturel n, $a^n \equiv b^n \mod 7$.
2. Pour $a = 2$ puis pour $a = 3$, déterminer un entier naturel n non nul tel que $a^n \equiv 1 \mod 7$.
3. Soit a un entier naturel non divisible par 7.
   (a) Montrer que : $a^6 \equiv 1 \mod 7$.
   (b) On appelle *ordre* de $a \mod 7$, et on désigne par k, le plus petit entier naturel non nul tel que $a^k \equiv 1 \mod 7$. Montrer que le reste r de la division euclidienne de 6 par k vérifie $a^r \equiv 1 \mod 7$.
   En déduire que k divise 6.
   Quelles sont les valeurs possibles de k ?
   (c) Donner l'ordre modulo 7 de tous les entiers a compris entre 2 et 6.
4. A tout entier naturel n, on associe le nombre

$$A_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n.$$

   Montrer que $A_{2006} \equiv 6 \mod 7$.

Exercice 3. (4 points)
Dans l'espace rapporté à un repère orthononnal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(1;2;3)$, $B(0;1;4)$, $C(-1\ ;\ -3\ ;\ 2)$, $D(4\ ;\ -2\ ;\ 5)$ et le vecteur $\vec{n}\,(2\ ;\ -1\ ;\ 1)$.

1. (a) Démontrer que les points A, B, C ne sont pas alignés.
   (b) Démontrer que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).
   (c) Déterminer une équation du plan (ABC).
2. Soit (Δ) la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2-2t \\ y & = & -1+t \\ z & = & 4-t \end{array}\right. \qquad \text{avec} t \in \mathbb{R}$$

   Montrer que le point D appartient à la droite (Δ) et que cette droite est perpendiculaire au plan (ABC).
3. Soit E le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).
   Montrer que le point E est le centre de gravité du triangle ABC.

Exercice 4. (8 points)

1. Pour tout entier naturel n non nul, on considère la fonction f_n définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \ln x + \frac{x}{n} - 1.$$

   (a) Déterminer les limites de f_n en 0 et en $+\infty$ puis étudier le sens de variations de f_n.

   (b) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution dans $]0\ ;\ +\infty[$. On note α_n cette solution. Montrer qu'elle appartient à l'intervalle $[1\ ;\ e]$.

2. Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$. On note (Γ) la courbe représentative de la fonction logarithme népérien.

   (a) Soit n un entier naturel non nul. Déterminer une équation de la droite Δ_n passant par le point A de coordonnées $(0;1)$ et le point B_n de coordonnées $(n\ ;\ 0)$.

   (b) Faire un croquis représentant la courbe (Γ) et les droites Δ_1, Δ_2 et Δ_3.

   (c) Montrer que α_n est l'abscisse du point d'intersection de (Γ) avec Δ_n.

   (d) Préciser la valeur de α_1 puis faire une conjecture sur le sens de variation de la suite (α_n).

3. (a) Exprimer $\ln(\alpha_n)$ en fonction de n et de α_n.

   (b) Exprimer $f_{n+1}(\alpha_n)$ en fonction de n et de α_n et vérifier que :

$$f_{n+1}(\alpha_n) < 0$$

   (c) Déduire de la question précédente le sens de variation de la suite (α_n).

   (d) Montrer que la suite (α_n) converge.
   On note ℓ sa limite. Etablir que : $\ln \ell = 1$ et en déduire la valeur de ℓ.

4. On désigne par $\mathcal{D}_n$ le domaine délimité par la courbe (Γ), l'axe des abscisses et les droites d'équation : $x = \alpha_n$ et $x = \mathrm{e}$.

   (a) Calculer l'aire du domaine $\mathcal{D}_n$ en fonction de α_n et montrer que cette aire est égale à $\dfrac{\alpha_n^2}{n}$.

   (b) Etablir que :

$$(\mathrm{e} - \alpha_n)\ln \alpha_n \leqslant \frac{\alpha_n^2}{n} \leqslant (\mathrm{e} - \alpha_n).$$

   (c) En déduire un encadrement de $n(\mathrm{e} - \alpha_n)$.

   (d) La suite de terme général $n(\mathrm{e} - \alpha_n)$ est-elle convergente ? Ce résultat permet-il d'apprécier la rapidité de la convergence de la suite (α_n) ?