DEVOIR SURVEILLÉ 6

Exercice 1. R.O.C (4 points)
Restitution organisée de connaissances
On suppose connue la propriété :
« Pour tout couple $(x\,;\,y)$ de nombres réels strictement positifs, on a
$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$. »

1. En déduire que, pour tout nombre réel m strictement positif, on a
$\ln\left(\sqrt{m}\right) = \dfrac{1}{2}\ln(m)$.
2. Utiliser le résultat de la question 1, en posant $m = ab$, pour placer sur l'axe des abscisses le point G d'abscisse $\sqrt{ab}$.
Expliquer la construction et la réaliser sur la figure de l'annexe 1 (on laissera les traits de construction apparents).

Exercice 2. (16 points)
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$ par

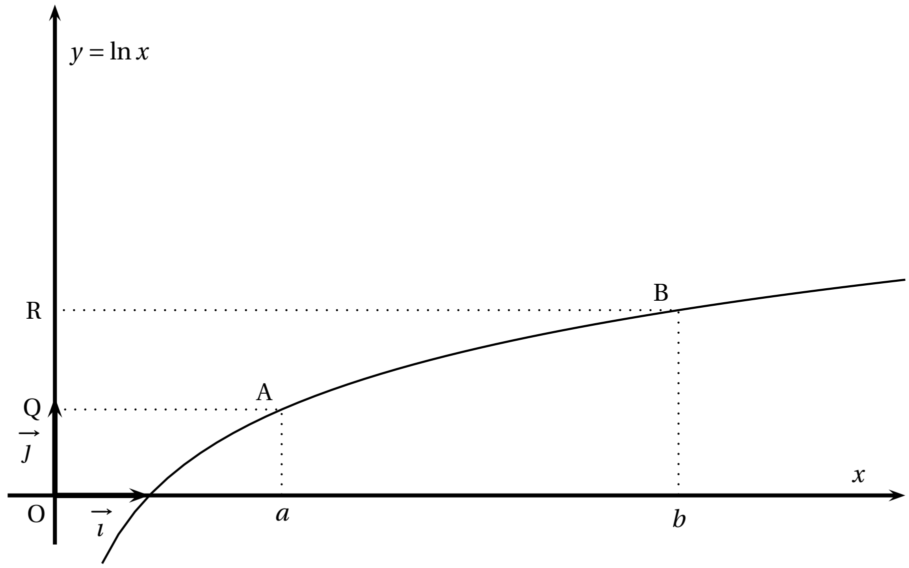
$$f(x) = \ln x - \frac{1}{\ln x}.$$

On nomme $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f et Γ la courbe d'équation $y = \ln x$ dans un repère orthogonal $(\text{O}; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Etudier les variations de la fonction f et préciser les limites en 1 et en $+\infty$.
2. (a) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}[f(x) - \ln x]$.
Interpréter graphiquement cette limite.
(b) Préciser les positions relatives de $(\mathscr{C})$ et de Γ.
3. On se propose de chercher les tangentes à la courbe $(\mathscr{C})$ passant par le point O.
(a) Soit a un réel appartenant à l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$.
Démontrer que la tangente $\mathscr{T}_a$ à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse a passe par l'origine du repère si et seulement si $f(a) - af'(a) = 0$.
Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$ par
$$g(x) = f(x) - xf'(x).$$
(b) Montrer que sur $]1\,;\,+\infty[$, les équations $g(x) = 0$ et
$(\ln x)^3 - (\ln x)^2 - \ln x - 1 = 0$ ont les mêmes solutions.
(c) Après avoir étudié les variations de la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(t) = t^3 - t^2 - t - 1$ montrer que la fonction u s'annule une fois et une seule sur $\mathbb{R}$.
(d) En déduire l'existence d'une tangente unique à la courbe $(\mathscr{C})$ passant par le point O.
La courbe $(\mathscr{C})$ et la courbe Γ sont données en annexe 2.
Tracer cette tangente le plus précisément possible sur cette figure.
4. On considère un réel m et l'équation $f(x) = mx$ d'inconnue x.
Par lecture graphique et sans justification, donner, suivant les valeurs du réel m, le nombre de solutions de cette équation appartenant à l'intervalle $]1\,;\,10]$.

ANNEXE 1
(*À rendre avec la copie*)

Exercice 1



ANNEXE 2
(*À rendre avec la copie*)

Exercice 2 - Représentations graphiques obtenues à l'aide d'un tableur