Préparation au BACCALAUREAT GENERAL

SESSION 2011

MATHEMATIQUES

Série : **S**

DUREE DE L'EPREUVE : **3 Heures**. COEFFICIENT : **6**.

Ce sujet comporte 3 pages numérotées de 1 à 3.

L'utilisation de la calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter tous les exercices.

Il est invité à faire sur le copie tout trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Devoir Surveillé 5

Exercice 1. R.O.C (2 points)

Le plan complexe est rapporté à un repre orthonormal direct $(O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.
Soient A, B et C trois points du plan d'affixes respectives a, b, c.
On suppose que A et B sont distincts, ainsi que A et C.
On rappelle que $\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{AB}\right) = \arg(b-a) \quad [2\pi]$.
Montrer que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right) \quad [2\pi]$.

Exercice 2. (11 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x + 2 - \frac{4\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 3}.$$

On désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité graphique 2 cm.

1. (a) Déterminer la limite de f en $-\infty$.
   (b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   (c) Démontrer que la droite $\mathscr{D}_1$ d'équation $y = x + 2$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.
   (d) Etudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{D}_1$.
2. (a) On note f' la fonction dérivée de f. Calculer $f'(x)$ et montrer que, pour tout réel x, on a :
   $$f'(x) = \left(\frac{\mathrm{e}^x - 3}{\mathrm{e}^x + 3}\right)^2$$
   (b) Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et dresser le tableau de variations de la fonction f.
3. (a) Que peut-on dire de la tangente $\mathscr{D}_2$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point I d'abscisse $\ln 3$?
   (b) En utilisant les variations de la fonction f, étudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{D}_2$.
4. (a) Montrer que la tangente $\mathscr{D}_3$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 a pour équation : $y = \dfrac{1}{4}x + 1$.
   (b) Etudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la tangente $\mathscr{D}_3$ sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ \ln 3]$.
   On pourra utiliser la dérivée seconde de f notée f'' définie pour tout x de $\mathbb{R}$ par :
   $$f''(x) = \frac{12\mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^x - 3\right)}{\left(\mathrm{e}^x + 3\right)^3}.$$
5. On admet que le point I est centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}$. Tracer la courbe $\mathscr{C}$, les tangentes $\mathscr{D}_2$, $\mathscr{D}_3$ et les asymptotes à la courbe $\mathscr{C}$. On rappelle que l'unité graphique choisie est 2 cm.

Exercice 3. (9 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
Soit A le point d'affixe $a = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ et B le point d'affixe $b = 1 - \sqrt{3} + \left(1 + \sqrt{3}\right)\mathrm{i}$.

Partie A : Etude d'un cas particulier On considère la rotation r de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.
On note C le point d'affixe c image du point A par la rotation r et D le point d'affixe d image du point B par la rotation r.
La figure est donnée en annexe (figure 1).

1. (a) Exprimer $\dfrac{-a}{b-a}$ sous forme algébrique.
   (b) En déduire que OAB est un triangle rectangle isocèle en A.
2. Démontrer que $c = -2$. On admet que $d = -2 - 2\mathrm{i}$.

(a) Montrer que la droite (AC) a pour équation $y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}(x+2)$.

(b) Démontrer que le milieu du segment [BD] appartient à la droite (AC).

Partie B : Etude du cas général

Soit θ un réel appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ 2\pi[$. On considère la rotation de centre O et d'angle θ.
On note A′ le point d'affixe a', image du point A par la rotation r, et B′ le point d'affixe b', image du point B par la rotation r.
La figure est donnée en annexe (figure 2).
L'objectif est de démontrer que la droite (AA′) coupe le segment [BB′] en son milieu.

1. Exprimer a' en fonction de a et θ et b' en fonction de b et θ.
2. Soit P le point d'affixe p milieu de [AA′] et Q le point d'affixe q milieu de [BB′].
   (a) Exprimer p en fonction de a et θ puis q en fonction de b et θ.
   (b) Démontrer que $\dfrac{-p}{q-p} = \dfrac{-a}{b-a}$.
   (c) En déduire que la droite (OP) est perpendiculaire à la droite (PQ).
   (d) Démontrer que le point Q appartient à la droite (AA′).

<u>Exercice</u> 4. (8 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O\vec{u}, \vec{v})$. On prendra pour unité graphique 2 cm.
Soit A, B et C les points d'affixes respectives :

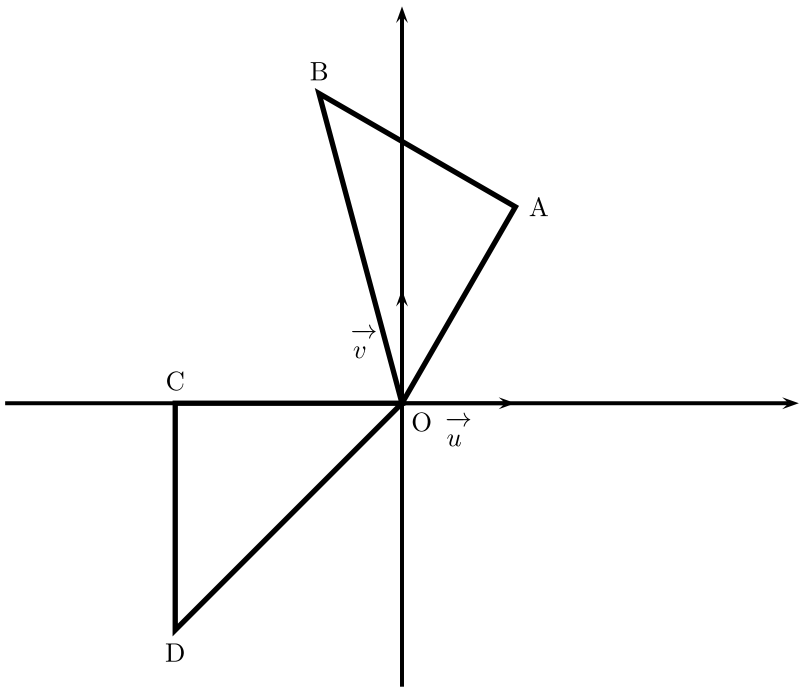
$$a = 3 - \mathrm{i}, \quad b = 1 - 3\mathrm{i} \text{ et } c = -1 - \mathrm{i}.$$

1. (a) Placer ces points sur une figure que l'on complètera au fur et à mesure.
   (b) Quelle est la nature du triangle ABC ?
   (c) Démontrer que les points A et B appartiennent à un même cercle Γ de centre O, dont on calculera le rayon.
2. Soit M un point quelconque du plan d'affixe notée m et N le point d'affixe notée n, image de A dans la rotation r de centre M et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{2}$.
   (a) Donner l'écriture complexe de la rotation r.
   (b) En déduire une expression de n en fonction de m.
3. On appelle Q le milieu du segment $[AN]$ et q son affixe. Montrer que : $q = \dfrac{(1-\mathrm{i})m}{2} + 2 + \mathrm{i}$.
4. Dans cette question, M est un point du cercle Γ.
   (a) Justifier l'existence d'un réel θ tel que : $m = \sqrt{10}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.
   (b) Calculer $|q - 2 - \mathrm{i}|$. Quel est le lieu Γ' de Q lorsque M décrit le cercle Γ ?

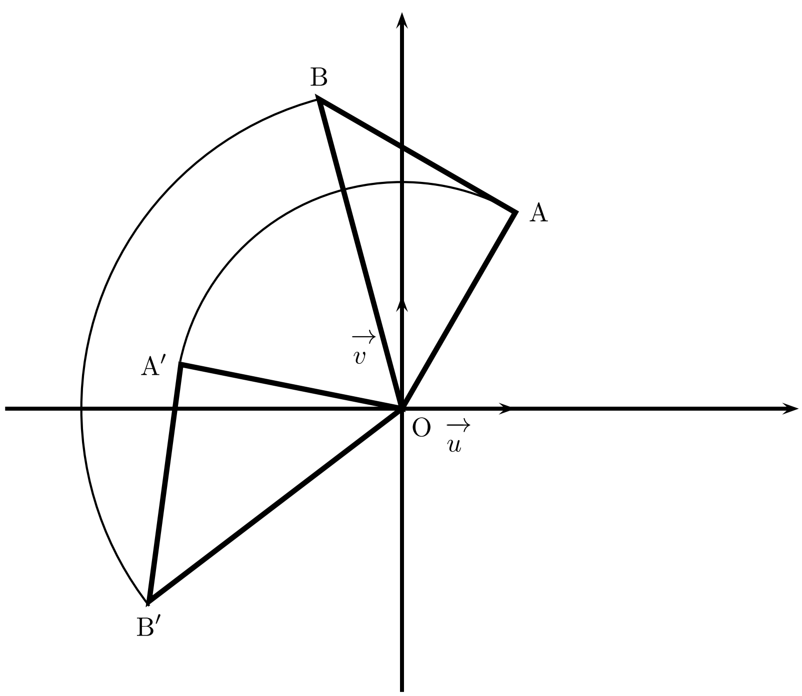
ANNEXE

Cette page ne sera pas à rendre avec la copie

Exercice 1



Partie A : figure 1



Partie B : figure 2