Devoir Surveillé 4

Exercice 1. R.O.C (4 points)

Pré-requis

Les solutions de l'équation différentielle $y' = -\lambda y$ sont les fonctions $x \mapsto C\mathrm{e}^{-\lambda x}$ où C est une constante réelle. Le but de cette question est de démontrer l'existence et l'unicité de la solution z de l'équation différentielle (E'$_\lambda$) : $z' = -(\lambda z + 1)$ telle que $z(0) = 1$.

1. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = -\frac{1}{\lambda}$$
est solution de $z' = -(\lambda z + 1)$.
2. Montrer que z est solution de $z' = -(\lambda z + 1)$ est équivalent à $z - f$ est solution de l'équation différentielle $y' = -\lambda y$.
3. En déduire l'ensemble des solutions z de l'équation différentielle $z' = -(\lambda z + 1)$.
4. En déduire l'existence et l'unicité de la solution de (E'$_\lambda$) dont on donnera l'expression z_0

Exercice 2. (16 points)

PARTIE A.

La température de refroidissement d'un objet fabriqué industriellement est une fonction f du temps t.
f est définie sur l'ensemble des nombres réels positifs et vérifie l'équation différentielle :
$$f'(t) + \frac{1}{2}f(t) = 10.$$
La température est exprimée en degrés Celsius (°C) et le temps t en heures.

1. Déterminer $f(t)$ pour $t \geqslant 0$, sachant que pour $t = 0$, la température de l'objet est 220 ° C.
2. On pourra admettre désormais que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}^+$ par
$$f(t) = 200\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} + 20.$$
On note $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthogonal ; les unités graphiques sont 2 cm pour une heure en abscisse et 1 cm pour vingt degrés Celsius en ordonnée.
   (a) Etudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}^+$.
   (b) Etudier la limite de la fonction f en $+\infty$.
   En déduire l'existence d'une asymptote $\mathscr{D}$ à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$.
   (c) Construire $\mathscr{D}$ et $\mathscr{C}$ sur l'intervalle $[0\ ;\ 7]$.
3. (a) Utiliser le graphique pour déterminer une valeur approchée, en heures et minutes, du moment où la température de l'objet est 50 ° C. On laissera apparents les traits de construction.
   (b) Retrouver ce résultat par le calcul.

PARTIE B.

On considère la suite de terme général $d_n = f(n) - f(n+1)$ où $n \in \mathbb{N}$. d_n représente l'abaissement de température de l'objet entre l'heure n et l'heure $n+1$.

1. (a) Calculer des valeurs approchées au dixième de d_0, d_1 et d_2.
   (b) Quelle est la limite de d_n quand n tend vers $+\infty$?
2. Déterminer la plus petite valeur de l'entier n à partir de laquelle l'abaissement de temprature est inférieur à 5 C.