Devoir Surveillé 3

Exercice 1. R.O.C (2 points)

On note E la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui au réel t associe sa partie entière $E(t)$ qui vérifie la relation :

$$E(t) \leq t < E(t) + 1$$

Montrer que la fonction E est discontinue pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2. *Etude d'une fonction rationnelle* (9 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{x^3 - 4}{x^2 + 1}$$

et on note $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans un repère orthonormal. (unité 1 cm).

1. **Etude d'une fonction auxiliaire**
   On pose $g(x) = x^3 + 3x + 8$.
   (a) Etudier le sens de variation de g, et montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $\mathbb{R}$ une unique α dont on donnera un encadrement d'amplitude $0,1$
   (b) Préciser le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.
2. (a) Calculer $f'(x)$ et étudier le sens de variation de f.
   (b) Etudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$, puis dresser le tableau de variations de f.
3. (a) Montrer qu'il existe quatre réels a, b, c et d tels que :
   $$f(x) = ax + b + \frac{cx + d}{x^2 + 1}$$
   (b) En déduire que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote oblique Δ, et étudier la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à Δ. Vérifier en particulier que $\mathscr{C}_f$ rencontre Δ en unique point A.
4. Déterminer les abscisses des points B et B' de $\mathscr{C}_f$ admettant une tangente parallèle à Δ.
5. (a) Vérifier que $f(\alpha) = \dfrac{3}{2}\alpha$; en déduire une valeur approchée de $f(\alpha)$.
   (b) Tracer Δ et $\mathscr{C}$ en plaçant les points A, B et B', ainsi que les trois points I, J et K d'abscisses respectives 1, 2 et -1 avec leurs tangentes.

Exercice 3. *Continuité* (3 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sin x}{x} & \text{pour } x \neq 0 \\ f(0) = 1 & \end{cases}$$

1. Expliquer pourquoi la fonction f est continue pour tout $x \neq 0$
2. En remarquant que $f(x) = \dfrac{\sin x - \sin 0}{x - 0}$, démontrer que :
   $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$
3. En déduire que la fonction f est continue en 0 et donc que f est continue sur $\mathbb{R}$

Exercice 4. *Etude d'une suite définie par récurrence* (7 points)

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{2}{u_n}\right) \end{cases}$$

1. (a) Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$$

Etudier le sens de variation de f.

   (b) Utiliser le graphique en dernière page pour construire les points A_0, A_1, A_2 et A_3 de l'axe $(O; \vec{i})$ d'abscisses respectives u_0, u_1, u_2 et u_3.

2. (a) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $u_n \geq \sqrt{2}$.

   (b) Montrer que pour tout $x \geq \sqrt{2}$, $f(x) \leq x$.

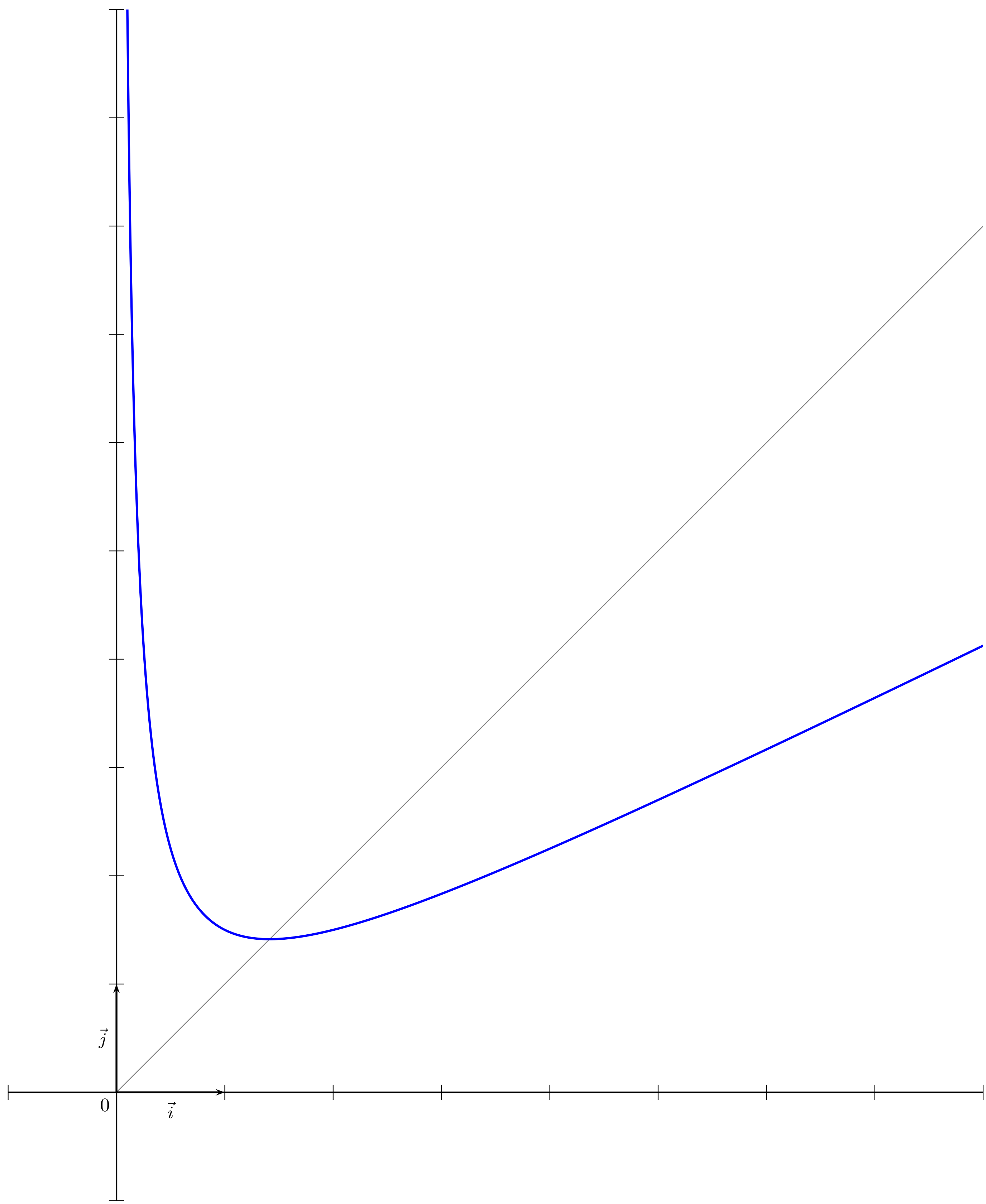
   (c) En déduire que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 1.

   (d) Prouver qu'elle converge.

3. Soit ℓ la limite de la suite (u_n). Montrer que ℓ est solution de l'équation

$$x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$$

En déduire sa valeur.



$\vec{j}$
0
$\vec{i}$