Devoir Surveillé 2

On traitera les questions hors barème que dans le cas où l'ensemble du sujet est déjà traité.

Exercice 1. ***R.O.C, France-juin 2005*** (3 points)

On considère deux suites adjacentes (u_n) et (v_n) avec (u_n) croissante et (v_n) décroissante.
On suppose connus les résultats suivants :

- ➢ deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes lorsque : l'une est croissante, l'autre est décroissante et $u_n - v_n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$;
- ➢ si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes telles que (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante, alors pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, on a $u_n \leqslant v_n$;
- ➢ toute suite croissante et majorée est convergente ; toute suite décroissante et minorée est convergente.

On veut montrer la proposition suivante :

« Deux suites adjacentes sont convergentes et elles ont la même limite ».

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$
2. En déduire que (u_n) converge. On note ℓ sa limite.
3. De même, déduire de 1. que (v_n) converge. On note ℓ' sa limite.
4. Montrer que $\ell = \ell'$.

Exercice 2. ***Antilles 2010*** (7 points)

On considère la suite de nombres réels (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = -1,\ u_1 = \frac{1}{2} \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n.$$

1. Calculer u_2 et en déduire que la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.
2. On définit la suite (v_n) en posant, pour tout entier naturel n : $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$.
   (a) Calculer v_0.
   (b) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.
   (c) En déduire que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
   (d) Exprimer v_n en fonction de n.
3. On définit la suite (w_n) en posant, pour tout entier naturel n :
$$w_n = \frac{u_n}{v_n}.$$
   (a) Calculer w_0.
   (b) En utilisant l'égalité $u_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}u_n$ et le résultat de la question 2.(b), exprimer w_{n+1} en fonction de u_n et de v_n.
   (c) En déduire que (w_n) est une suite arithmétique de raison 2.
   (d) Exprimer w_n en fonction de n.
4. Montrer que pour tout entier naturel n
$$u_n = \frac{2n-1}{2^n}.$$
5. Pour tout entier naturel n, on pose : $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$. Démontrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$:
$$S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}.$$

Exercice 3. ***Métropole Septembre 2010*** (5 points (+2))

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et pour tout nombre entier naturel n, par

$$u_{n+1} = \frac{4u_n - 1}{u_n + 2}$$

Si f est la fonction définie sur l'intervalle $]-2\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4x-1}{x+2}$, alors on a, $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = f(u_n)$.

On donne en annexe une partie de la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f ainsi que la droite Δ d'équation $y = x$.

1. (a) Sur la courbe donnée en annexe et à rendre avec la copie, placer u_0 sur l'axe des abscisses puis construire u_1, u_2 et u_3 en laissant apparents les traits de construction.
   (b) Quelles conjectures peut-on émettre sur le sens de variation et sur la convergence de la suite (u_n) ?
2. (a) Démontrer par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $u_n - 1 > 0$. En déduire que (u_n) est minorée.
   (b) Le but de cette question est de valider par une démonstration les conjectures émises à la question 1. b.
      i. Montrer que f est une fonction strictement croissante sur $]-2;+\infty[$.
      ii. En déduire, par un raisonnement par récurrence, que la suite (u_n) est strictement décroissante. [1]
      iii. En déduire que la suite (u_n) converge. On note ℓ sa limite.
      iv. Montrer que $\ell = \dfrac{4\ell - 1}{\ell + 2}$, puis déterminer ℓ.
3. **(Hors Barème)** Dans cette question, on se propose d'étudier la suite (u_n) par une autre méthode, en déterminant une expression de u_n en fonction de n.
   Pour tout nombre entier naturel n, on pose $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$.
   (a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $\dfrac{1}{3}$. [2]
   (b) Pour tout nombre entier naturel n, exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
   (c) En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 4. (**Liban 2009**) (5 points (+2))

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique : 2 cm).

On considère les points A, B et C d' affixes respectives :

$$z_{\mathrm{A}} = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},\ z_B = \overline{z_A} \text{ et } z_C = -3.$$

1. (a) Ecrire les nombres complexes z_A et z_B sous forme exponentielle.
   (b) Placer les points A, B et C.
   (c) Démontrer que le triangle ABC est équilatéral.
2. Soit f l'application qui, à tout point M du plan d'affixe z, associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{1}{3}iz^2$.
   On note O', A', B' et C' les points respectivement associés par f aux points O, A, B et C.
   (a) i. Déterminer la forme exponentielle des affixes des points A', B' et C'. [3]
      ii. Placer les points A', B' et C' .
      iii. Démontrer l'alignement des points O, A et B' ainsi que celui des points O, B et A'.
   (b) Soit G l'isobarycentre des points O, A, B et C. On note G' le point associé à G par f.
      i. Déterminer les affixes des points G et G'.
      ii. **(Hors Barème)** Le point G' est-il l'isobarycentre des points O' A', B' et C' ?
   (c) **(Hors Barème)** Démontrer que si M appartient à la droite (AB) alors M' appartient à la parabole d'équation $y = -\dfrac{1}{3}x^2 + \dfrac{3}{4}$. (On ne demande pas de tracer cette parabole)

1. On montrera la propriété $\mathscr{P}(n) : u_{n+1} < u_n$
2. On pourra montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{3}$
3. On remarquera que $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$

ANNEXE 2 (Exercice 3)
(à rendre avec la copie)