Devoir Surveillé 1

Exercice 1. ***R.O.C*** (3 points)

1. Démontrer qu'un nombre complexe z est imaginaire pur si et seulement si $\overline{z} = -z$.
2. Démontrer qu'un nombre complexe z est réel si et seulement si $\overline{z} = z$.
3. Démontrer que pour tout nombre complexe z, on a l'égalité : $z\overline{z} = |z|^2$.

Exercice 2. (4 points)

On considère dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation (E) d'inconnue z suivante :

$$z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i = 0$$

1. Montrer que $-i$ est solution de (E)
2. Déterminer les nombres réels a, b et c tels que :

$$z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i = (z+i)(az^2 + bz + c)$$

3. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes.

Exercice 3. 2007 (7 points)

Soit les nombres complexes :

$$z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{6} \qquad z_2 = 2 + 2i \qquad Z = \frac{z_1}{z_2}$$

1. Ecrire Z sous forme algébrique.
2. Donner les modules et arguments de z_1 , z_2 et Z
3. En déduire $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$
4. Le plan est muni d'un repère orthonormal ; on prendra 2 cm comme unité graphique. On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives z_1, z_2 et Z.
   (a) Placer le point B, puis en utilisant la règle non graduée et le compas (on laissera les traits de construction apparents), placer le point A.
   (b) Placer le point C en utilisant la règle non graduée et le compas (on laissera les traits de construction apparents).
5. Ecrire sous forme algébrique le nombre complexe Z^{2010}.

Exercice 4. 2005 (6 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ (unité graphique : 8 cm).
On appelle A le point d'affixe -1 et B le point d'affixe 1
Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des points du plan distincts de A, O et B.
A tout point M d'affixe z appartenant à l'ensemble $\mathscr{E}$, on associe le point N d'affixe z^2 et le point P d'affixe z^3.

1. Prouver que les points M, N et P sont deux à deux distincts.
2. On se propose de déterminer l'ensemble $\mathscr{C}$ des points M appartenant à $\mathscr{E}$ tels que le triangle MNP soit rectangle en P.
   (a) En utilisant le théorème de Pythagore, démontrer que le triangle MNP est rectangle en P si, et seulement si, $|z+1|^2 + |z|^2 = 1$
   (b) Démontrer que $|z+1|^2 + |z|^2 = 1 \iff \left(z+\dfrac{1}{2}\right)\overline{\left(z+\dfrac{1}{2}\right)} = \dfrac{1}{4}$
   (c) En déduire l'ensemble $\mathscr{C}$ cherché.