Correction du devoir Maison 9

Partie I

1. (a) $g(x) = h(x)\mathrm{e}^{-x} \Rightarrow g'(x) = h'(x)\mathrm{e}^{-x} - h(x)\mathrm{e}^{-x}$.
   g est solution de E_n si et seulement si :
   $g' + g = \dfrac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x} \iff h'(x)\mathrm{e}^{-x} - h(x)\mathrm{e}^{-x} + h(x)\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x} \iff h'(x)\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}$ et comme $\mathrm{e}^{-x} \neq 0$, quel que soit $x \in \mathbb{R}$, on a finalement $h'(x) = \dfrac{x^n}{n!}$.

   (b) On a $(\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)n!})' = \dfrac{x^n}{n!}$ et $\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)n!} = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$, donc $h(x) = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} + K$ et comme $h(0) = 0$, il en résulte $K = 0$.
   Donc $h(x) = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ Comme $g(x) = h(x)\mathrm{e}^{-x}$, on a finalement quel que soit x réel :
   $$g(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}^{-x}.$$

2. (a) φ est solution de (E_n) si et seulement si $\varphi + \varphi' = \dfrac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}$.
   g est solution de (E_n) donc $g' + g = \dfrac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}$, d'où par différence
   $$\varphi + \varphi' - (g' + g) = 0 \iff (\varphi - g)' + (\varphi - g) = 0$$
   Donc φ est solution de (E_n) si et seulement si $\varphi - g$ est solution de l'équation :
   $$\text{(F)} \qquad y' + y = 0.$$

   (b) On sait que les solutions sont les fonctions $x \longmapsto C\mathrm{e}^{-x}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

   (c) Les fonctions $\varphi - g$ sont donc les fonctions $C\mathrm{e}^{-x}$, donc $\varphi(x) = g(x) + C\mathrm{e}^{-x}$ soit finalement :
   $$\varphi(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}^{-x} + C\mathrm{e}^{-x},\ C \in \mathbb{R}.$$

   (d) La solution vérifiant $\varphi(0) = 0$ est telle que $0 + C = 0/iffC = 0$.
   Finalement :
   $$f(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}^{-x} \quad \text{sur } \mathbb{R}.$$

Partie II

1. (a) f_1 produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ est dérivable et sur $\mathbb{R}$, $f_1'(x) = \mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x}$.
   Donc $f_1'(x) + f_1(x) = \mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x} + x\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}$, c'est-à-dire que f_1 est solution de l'équation différentielle $y' + y = f_0$.

   (b) **Initialisation :** pour $n = 1$, $f_1(x) = \dfrac{x^1}{1!}\mathrm{e}^{-x}$ est solution de l'quation diffrentielle $y' + y = f_{1-1}$ et $f_1(0) = 0$, d'après la question précédente.
   Hérédité : on suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}$.
   Par définition f_{n+1} vrifie $f_{n+1}'(x) + f_{n+1}(x) = \dfrac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}$ et $f_{n+1}(0) = 0$.
   D'après la partie 1, la fonction solution de l'équation différentielle ci-dessous est :
   $$f_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}^{-x}$$

L'égalité est vraie au rang $n+1$.L'hérédité est démontrée.
On a donc démontrer que pour tout naturel $n \geqslant 1$,

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}.$$