Correction du devoir Maison 8

Exercice 1 :

On souhaite étudier et représenter graphiquement la fonction tangente :

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

1. **a.** $\cos x = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{\pi}{2}[\pi]$.

b. D'après la question précédente la fonction tangente est définie pour tout $x \neq \frac{\pi}{2}[\pi]$

c. On a pour tout $x \neq \frac{\pi}{2}[\pi]$

$$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$$

La fonction tangente est donc impaire, ainsi sa représentation graphique est symétrique par rapport à l'origine du repère.

d. On a pour tout $x \neq \frac{\pi}{2}[\pi]$

$$\tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \tan x$$

ce qui prouve que la fonction tangente est périodique de période π.

Remarque : Par conséquent, on va se contenter d'étudier la fonction tangente sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$, puis à l'aide de la parité on complétera le tracé par la symétrie de centre O, et à l'aide de la périodicité par une série de translation « horizontale ».

2. Etudions les limites de la fonction tangente en 0^+ et en $\frac{\pi}{2}^-$.

On a d'une part $\lim\limits_{x\to 0^+} \sin x = 0$ et d'autre part $\lim\limits_{x\to 0^+} \cos x = 1$, ainsi la limite de la fonction tangente en 0^+ est 0.

De plus on a $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \sin x = 1$ et $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \cos x = 0^+$, or :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

donc

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan x = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\sin x}{\cos x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

Ainsi la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction tangente admet une asymptote verticale d'équation $x = \frac{\pi}{2}$

3. Etudions les variations de la fonction tangente sur $I = \left[0;\frac{\pi}{2}\right[$.

$$\tan' x = \frac{\cos^x \times \cos^x - \sin x \times (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

puisque $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Mais on a aussi $\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ Ainsi :

$$\tan' x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \geq 1 > 0$$

Par conséquent la fonction tangente est strictement croissante sur I.

4. **a.** Une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 :

$$y = f'(0)(x-0) + f(0) \qquad \text{avec } \tan x = f(x)$$

Donc $f(0) = \tan 0 = 0$ et $f'(0) = 1 + \tan^2 0 = 1$, d'où l'équation de T :

$$y = x$$

b. Démontrons que pour tout $x \in I$, on a :

$$\tan x \geq x$$

Considérons la fonction g définie sur I par $g(x) = \tan x - x$.
On a alors pour tout $x \in I$:

$$g'(x) = 1 + \tan^2 x - 1 = \tan^2 x \geq 0$$

Ainsi la fonction g est croissante sur I, donc pour tout $x \in I$:

$$g(x) \geq g(0) \Longleftrightarrow \tan x - x \geq 0 \Longleftrightarrow \tan x \geq x$$

c. Comme $\tan x - x \geq 0$ la courbe $\mathscr{C}$ est au dessus de T.

5. En bleu les droites Δ (i.e les asymptotes verticales de $\mathscr{C}$ et la courbe $\mathscr{C}$, et en rouge T . (On se placera entre les bornes -2π et 2π)