Correction du devoir Maison 7

Exercice 1. *Une caractérisation des fonctions égales à leur réciproque* (5 points)
On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f \circ f(x) = x$$

et $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1. Soit g la fonction définie sur $[0;1]$ par

$$g(x) = x - 2\sqrt{x} + 1$$

a. La fonction g est dérivable pour tout $x \in]0;1]$ et on a pour tout $x \in][0;1]$ on a :

$$g'(x) = 1 - \frac{2}{2\sqrt{x}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Comme $x \in]0;1]$ on a :

$$\begin{aligned}
& 0 < x \leq 1 \\
\iff \quad & 0 < \sqrt{x} \leq 1 \\
\iff \quad & \frac{1}{\sqrt{x}} \geq 1 \\
\iff \quad & -\frac{1}{\sqrt{x}} \leq -1 \\
\iff \quad & 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} \leq 0 \\
\iff \quad & g'(x) \leq 0
\end{aligned}$$

Par conséquent la fonction g est strictement décroissante sur $[0;1]$ car g' ne s'annule que pour $x = 1$.

b. Pour tout $x \in [0;1]$ on a

$$g \circ g(x) = g(x - 2\sqrt{x} + 1) = x - 2\sqrt{x} + 1 - 2\sqrt{x - 2\sqrt{x} + 1} + 1 = x - 2\sqrt{x} + 2 - 2\sqrt{(\sqrt{x} - 1)^2}$$

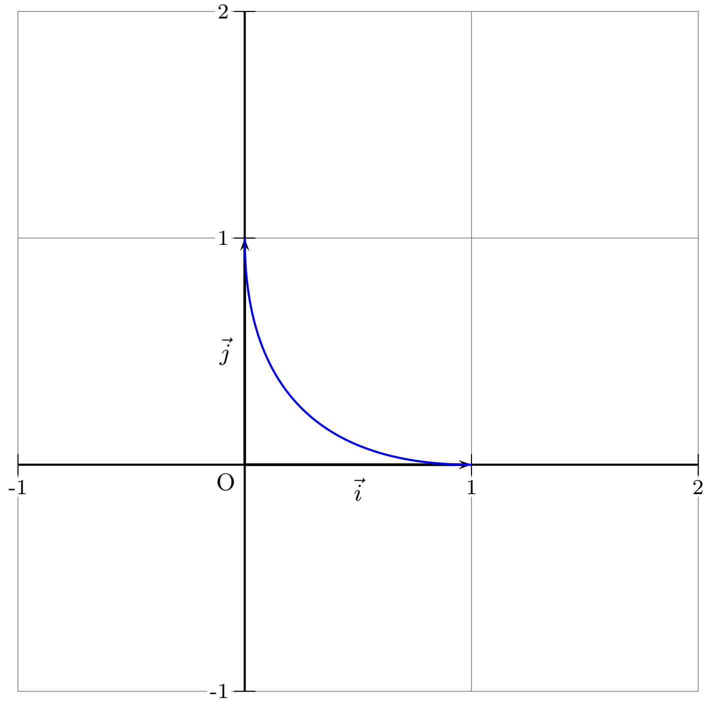
Or pour $x \in [0;1]$ on a $\sqrt{x} - 1 \leq 0$ donc $\sqrt{(\sqrt{x}-1)^2} = -(\sqrt{x} - 1) = 1 - \sqrt{x}$, on a donc pour tout $x \in [0;1]$:

$$g \circ g(x) = x - 2\sqrt{x} + 2 - 2(1 - \sqrt{x}) = x - 2\sqrt{x} + 2 - 2 + 2\sqrt{x} = x$$

c. cf. ci dessous

2. **a.** Si $M(x;y) \in \mathscr{C}_f$ alors M a pour coordonnées $(x; f(x))$, comme $f \circ f(x) = x$ on a le point $M'(f(x); f \circ f(x) = x) \in \mathscr{C}_f$.

b. $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$ d'après la question précédente.



Exercice 2. *Continuité* (5 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2(2-x) & \text{si} \quad x \in [0;2[\\ f(2+x) = f(x) & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

1. **a.** Sur $[0;2[$ la fonction f est une fonction polynôme, elle est donc continue. De plus pour $x = 2$ on a :

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} f(x) = f(0) = 0$$

et

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} f(x) = f(2) = 0$$

Par conséquent on a :

$$\lim_{x \to 2} f(x) = f(2) = 0$$

ce qui prouve que la fonction f est continue en 2.
Au final f est continue sur $[0;2]$

b. Pour tout $x \in [0;2]$ on a $f'(x) = 2x(2-x) - x^2 = x(4-2x-x) = x(4-3x)$

$$f'(x) = 0 \iff x = 0 \qquad \text{ou} \qquad 4 - 3x = 0 \iff x = \frac{4}{3}$$

On en déduit le tableau de variation de f :

x	0		$\frac{4}{3}$		2
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{32}{27}$	$\searrow$	0

cf ci-dessous pour la courbe.

c. On peut en déduire la représentation graphique de f sur l'intervalle $[2n; 2n+2]$ où $n \in \mathbb{Z}$ par translation de vecteur $2n\vec{i}$ de la représentation graphique de f sur $[0; 2]$

2. Si $x \in [2n; 2n+2]$ alors $x - 2n \in [0; 2]$ et :

$$f(x-2n) = (x-2n)^2(2-x+2n) = (x-2n)^2(2n+2-x)$$

Montrons que $f(x) = f(x-2n)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
Par récurrence notons $\mathscr{P}(n) : f(x) = f(x-2n)$

- pour $n = 0$ la propriété $\mathscr{P}$ est trivialement vraie.
- Supposons que $\mathscr{P}$ soit vraie au rang n et montrons que $\mathscr{P}$ est vraie au rang $n+1$
  On a donc $f(x-2n) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, or on a $f(x+2) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc on a $f(x-2) = f(x)$ en appliquant la formule précédente pour $x - 2$ donc :

$$f(x-2n-2) = f(x-2n) = f(x) \Longleftrightarrow f(x-2(n+1)) = f(x)$$

  La propriété est donc vraie au rang $n+1$, ainsi pour tout $x \in [2n; 2n+2]$ avec $n \in \mathbb{N}$ on a

$$f(x) = (x-2n)^2(2-x+2n)$$

Si $n \leq 0$ alors posons $m = -n \in \mathbb{N}$ et montrons, par récurrence la propriété $\mathscr{P}'(n)$:

$$f(x+2m) = f(x)$$

- pour $m = 0$ la propriété $\mathscr{P}'$ est trivialement vraie.
- Supposons que $\mathscr{P}'$ soit vraie au rang m et montrons que $\mathscr{P}'$ est vraie au rang $m+1$

$$f(x+2m+2) = f(x+2m) = f(x)$$

  La propriété $\mathscr{P}'$ est donc vraie au rang $m+1$
  Par conséquent on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \leq 0$:

$$f(x-2n) = f(x+2m) = f(x)$$

Pour résumé si $x \in [2n; 2n+2]$, alors

$$f(x) = (x-2n)^2(2n+2-x)$$

3. En raisonnant comme en $1.a$, puisque f est une fonction polynôme f est continue sur tout intervalle de la forme $[2n; 2n+2[$, de plus pour $x = 2n$

$$\lim_{\substack{x \to 2n \\ x > 2n}} f(x) = 0$$

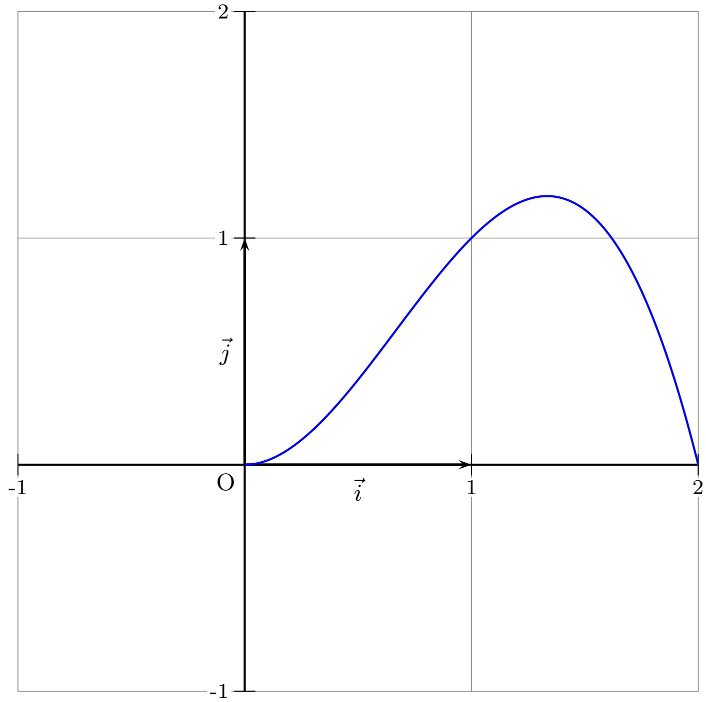
et

$$\lim_{\substack{x \to 2n \\ x < 2n}} f(x) = 0$$

Par conséquent on a :

$$\lim_{x \to 2n} f(x) = 0 = f(2n)$$

Ainsi f est continue sur $\mathbb{R}$



2
1
-1
-1
O
1
2
$\vec{i}$
$\vec{j}$