Correction du devoir Maison 6

1. La suite u est définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + \dfrac{23}{27}$ pour tout entier naturel n.
   (a) Cf. Dernière page.
   (b) Démontrer que si la suite u est convergente, alors sa limite $\ell = \dfrac{23}{18}$.
   Supposons que la suite (u_n) soit convergente vers ℓ, comme la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{3}x + \dfrac{23}{27}$ est continue sur $\mathbb{R}$, la suite $(f(u_n)$ converge vers $f(\ell)$ et on a donc :
$$f(\ell) = \ell \Longleftrightarrow \frac{1}{3}\ell + \frac{23}{27} = \ell \Longleftrightarrow \ell\left(\frac{1}{3} - 1\right) = -\frac{23}{27} \Longleftrightarrow \ell = \frac{23}{27} \times \frac{3}{2} = \frac{23}{18}$$
   (c) Démontrer que pour tout entier naturel n, on a $u_n \geq \dfrac{23}{18}$.
   Notons pour cela $\mathscr{P}(n) : u_n \geq \dfrac{23}{18}$
   – *Initialisation* : $u_0 = 2 > \dfrac{23}{18}$, par conséquent la propriété $\mathscr{P}$ est vraie au rang 0.
   – *Hérédité* : Supposons que $\mathscr{P}$ soit vraie au rang n et montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$
   On suppose donc que $u_n \geq \dfrac{23}{18} \Longleftrightarrow \dfrac{1}{3}u_n \geq \dfrac{23}{54} \Longleftrightarrow u_{n+1} \geq \dfrac{23}{54} + \dfrac{23}{27} = \dfrac{23+46}{54} = \dfrac{69}{54} = \dfrac{23}{18}$
   La propriété $\mathscr{P}$ est donc vraie au rang $n+1$, on a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$u_n \geq \frac{23}{18}$$
   (d) On étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$:
$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}u_n + \frac{23}{27} - u_n = -\frac{2}{3}u_n + \frac{23}{27} \geq -\frac{2}{3} \times \frac{23}{18} + \frac{23}{27} = \frac{-46+46}{54} = 0$$
   De plus
$$u_n \geq \frac{23}{18} \Longleftrightarrow -\frac{2}{3}u_n \leq -\frac{46}{54} \Longleftrightarrow -\frac{2}{3}u_n + \frac{23}{27} \leq -\frac{46}{54} + \frac{23}{27} = \frac{-46+46}{54} = 0$$
   Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$, et donc la suite (u_n) est décroissante. Comme, de plus, la suite (u_n) est minorée, elle est donc convergente.
   Enfin on a démontré qui si elle était convergente sa limite était $\dfrac{23}{18}$, par conséquent sa limite est $\dfrac{23}{18}$

2. (a) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. Posons $w_n = \dfrac{1}{10^n}$ alors la suite (w_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{10}$ et de premier terme 1.
   Ainsi la somme des n termes suivants vaut :
$$\frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots + \frac{1}{10^{n+1}} = \frac{1}{10^2} \times \frac{1 - \frac{1}{10^n}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{100} \times \frac{1 - \frac{1}{10^n}}{\frac{90}{100}} = \frac{1}{90} \times \left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$$
   (b) La suite v est définie par $v_n = 1,2777\ldots7$ avec n décimales consécutives égales à 7.
   Ainsi $v_0 = 1,2$, $v_1 = 1,27$ et $v_2 = 1,277$.
   On a $v_0 = 1,2$, $v_1 = 1,2 + 0,07 = 1,2 + 7 \times \dfrac{1}{100} = 1,2 + 7 \times \dfrac{1}{10^2}$, puis
$$v_2 = 1,2 + 7 \times 0,01 + 7 \times 0,01 = 1,2 + 7\left(\frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3}\right)$$
   Et enfin, pour $n \geq 2$ on a :
$$v_n = 1,2 + 7\left(\frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots + \frac{1}{10^{n+1}}\right)$$

et donc d'après la question précédente :

$$v_n = 1,2 + 7\left(\frac{1}{90} \times \left(1 - \frac{1}{10^n}\right)\right)$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{10^n} = 0$ on a aussi :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = 1,2 + 7 \times \frac{1}{90} = 1,2 + \frac{7}{90} = \frac{12}{10} + \frac{7}{90} = \frac{108+7}{90} = \frac{115}{90} = \frac{23}{18}$$

3. On a vu que la suite (u_n) était décroissante et avait pour limite $\frac{23}{18}$, de plus :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n - v_n = \frac{23}{18} - \frac{23}{18} = 0$$

Par conséquent les suites (u_n) et (v_n) sont ajdacentes si et seulement si la suite (v_n) est croissante. Déterminons donc le sens de variation de la suite (v_n), On a :

$$v_{n+1} - v_n = 1,2 + 7\left(\frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots + \frac{1}{10^{n+2}}\right) - 1,2 - 7\left(\frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots + \frac{1}{10^{n+1}}\right) = 7 \times \frac{1}{10^{n+2}} > 0$$

Par conséquent la suite (v_n) est croissante, ce qui prouve que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. La suite u définie au 1. et la suite v sont-elles adjacentes ? Justifier.