Correction du devoir Maison 5

Exercice 1. 2010 (5 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = 6 - \frac{5}{x+1}.$$

Le but de cet exercice est d'étudier des suites (u_n) définies par un premier terme positif ou nul u_0 et vérifiant pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

1. Etude de propriétés de la fonction f
   (a) On a :
   $$f'(x) = \frac{5}{(x+1)^2} > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+$$
   Par conséquent la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$
   (b) Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ on a :
   $$\begin{aligned} & f(x) = x \\ \iff & 6 - \frac{5}{x+1} = x \\ \iff & -\frac{5}{x+1} = x - 6 \\ \iff & \frac{5}{x+1} = 6 - x \\ \iff & 5 = (6-x)(x+1) \\ \iff & 5 = 6x + 6 - x^2 - x \\ \iff & x^2 - 5x - 1 = 0 \\ \iff & x_1 = \frac{5+\sqrt{29}}{2} > 0 \quad \text{ou} \quad \frac{5-\sqrt{29}}{2} < 0 \end{aligned}$$
   donc $\alpha = \dfrac{5+\sqrt{29}}{2}$.
   (c) Si $x \in [0; \alpha]$ alors $0 \leq x \leq \alpha$.
   Comme la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}^+$ alors $0 \leq x \leq \alpha \Longrightarrow f(0) \leq f(x) \leq f(\alpha)$
   Or, $f(0) = 6 - 5 = 1$ et on a vu que pour $x = \alpha$ $f(\alpha) = \alpha$
   donc : $1 \leq f(x) \leq f(\alpha) \Longrightarrow f(x) \in [0; \alpha]$
   De même
   $$\begin{aligned} & x \in [\alpha; +\infty[\\ \Longrightarrow & \alpha \leq x \\ \Longrightarrow & f(\alpha) \leq f(x) \qquad \text{puisque } f \text{ est croissante sur } [0; +\infty[\\ \Longrightarrow & \alpha \leq f(x) \\ \Longrightarrow & f(x) \in [\alpha; +\infty[\end{aligned}$$
2. Etude de la suite (u_n) pour $u_0 = 0$
   Dans cette question, on considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n :
   $$u_{n+1} = f(u_n) = 6 - \frac{5}{u_n + 1}.$$

(a) Cf graphique en fin de corrigé
La suite (u_n) semble croissante croissante et semble converger vers α.

(b) Notons $\mathscr{P}(n)$ $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$.
– *Initialisation* : $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$ donc $0 \leq 0 \leq 1 \leq \alpha \simeq 5,19$ i.e

$$0 \leq u_0 \leq u_1 \leq \alpha$$

La propriété $\mathscr{P}$ est donc vraie au rang 0.
– *Hérédité* On suppose que la propriété est vraie pour un certain rang n et on cherche à montrer que $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \alpha$ i.e que la propriété est vraie au rang $n+1$
On sait que

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$$

Or, la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}^+$ donc :

$$f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(\alpha) \Longleftrightarrow (0 \leq)1 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \alpha$$

$\mathscr{P}$ est donc vraie au rang $n+1$, la propriété $\mathscr{P}$ est donc héréditaire, ce qui prouve que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$$

(c) D'après la question précédente (u_n) est croissante et majorée par α, par conséquent elle est convergente. Soit ℓ sa limite on a :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell$$

De plus (car f est une fonction continue) on a :

$$\lim_{n \to +\infty} f(u_n) = f(\ell)$$

Comme $u_{n+1} = f(u_n)$, par passage à la limite on obtient :

$$\ell = f(\ell) \Longleftrightarrow \ell = \alpha$$

Par conséquent :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \alpha$$

3. Etude des suites (u_n) selon les valeurs du réel positif ou nul u_0
Dans cette question, toute trace d'argumentation, même incompleète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'eévaluation.
Que peut-on dire du sens de variation et de la convergence de la suite (u_n) suivant les valeurs du réel positif ou nul u_0 ?
On a vu que lorsque $u_0 = 0$, alors (u_n) est croissante et converge vers α.

– Pour $u_0 \in]0; \alpha[$
A voir le graphique, on conjecture que (u_n) sera croissante et convergente vers α.
Prouvons par récurrence que

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$$

La démonstration de l'hérédité est équivalente à celle de la question 2. Observons l'initialisation :
On veut montrer que $u_0 < u_1$
$u_1 - u_0 = 6 - \dfrac{5}{u_0+1} - u_0 = \dfrac{6u_0 + 6 - 5 - u_0^2 - u_0}{u_0+1} = \dfrac{-u_0^2 + 5u_0 + 1}{u_0+1}$ Comme $u_0 > 0$ on a $u_0 + 1 > 0$, étudions le signe du numérateur : $\Delta = 25 + 4 = 29$ on a donc deux solutions α et $\alpha' = \dfrac{5 - \sqrt{29}}{2}$ et de plus $-x^2 + 5x + 1 > 0$ pour $x \in [\alpha'; \alpha]$.
Par conséquent comme $u_0 \in]0; \alpha[$, on a : $u_1 - u_0 > 0 \Longleftrightarrow u_1 > u_0$ De plus comme $u_0 < \alpha$ alors $f(u_0) = u_1 < \alpha$ et donc la propriété $\mathscr{P}$ est initialisée.
Etant donné que la suite (u_n) est croissante et majorée, elle est convergente, sa limite est encore α en raisonnant de la même manière que dans la question 2.(c).

- Si $u_0 = \alpha$ alors $u_n = \alpha$ (faire une récurrence pour s'en convaincre)
- Enfin si $u_0 > \alpha$.
  A voir le graphique, il semblerait que (u_n) soit décroissante et converge vers α.
  Notons $\mathscr{P}(n)$: $\alpha < u_{n+1} \leq u_n$
  - *Initialisation* Comme $u_0 > \alpha$ et que f est une fonction croissante sur $\mathbb{R}^+$ on a :

    $$f(\alpha) < f(u_0) = u_1 \Longleftrightarrow \alpha < u_1$$

    Comme dans le cas précédent on étudie la différence $u_1 - u_0 = \dfrac{-u_0^2 + 5u_0 + 1}{u_0 + 1} < 0$ pour $u_0 > \alpha$, par conséquent la propriété $\mathscr{P}$ est vraie au rang 0.
  - *Hérédité* Supposons que la propriété $\mathscr{P}(n)$ soit vraie pour un certain n et montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$. On a donc :

    $$\alpha < u_{n+1} \leq u_n$$

    Comme la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ alors :

    $$f(\alpha) < f(u_{n+1} \leq f(u_n) \Longleftrightarrow \alpha < u_{n+2} < u_{n+1}$$

    donc la propriété est vraie au rang $n+1$, ce qui prouve que la suite (u_n) est décroissante et minorée donc convergente vers un réel ℓ. De plus :

    $$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$$

    De plus (car f est une fonction continue) on a :

    $$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$$

    Comme $u_{n+1} = f(u_n)$, par passage à la limite on obtient :

    $$\ell = f(\ell) \Longleftrightarrow \ell = \alpha$$

    Par conséquent :

    $$\lim_{n\to+\infty} u_n = \alpha$$