Correction du devoir Maison 4

Exercice 1. 2010 (5 points)
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2$$

1. $u_1 = \frac{1}{3} + 0 - 2 = -\frac{5}{3}$ et $u_2 = -\frac{1}{3} \times \frac{5}{3} + 1 - 2 = -\frac{5}{9} - 1 = -\frac{14}{9}$ et enfin $u_3 = -\frac{1}{3} \times \frac{14}{9} + 2 - 2 = -\frac{14}{27}$.
2. (a) On montre par récurrence la propriété $\forall n \geq 4$:

$$\mathscr{P}(n) : u_n \geq 0$$

   – *Initialisation* : Pour $n = 4$ on a $u_4 = -\frac{1}{3} \times \frac{14}{27} + 3 - 2 = \frac{67}{81} > 0$
   Par conséquent la propriété $\mathscr{P}$ est vraie au rang 0.
   – *Hérédité* On suppose que pour un certain $n \geq 4$ la propriété $\mathscr{P}(n)$ est vraie et on cherche à montrer que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie. On a d'après l'hypothèse de récurrence :

$$u_n \geq 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{3}u_n \geq 0$$

   Or $n \geq 4 \Longleftrightarrow n - 2 \geq 2$, par conséquent :

$$\frac{1}{3}u_n + n - 2 \geq 2 \geq 0 \Longleftrightarrow u_{n+1} \geq 0$$

   La propriété $\mathscr{P}$ est ainsi vraie au rang $n+1$, ce qui montre que pour tout $n \geq 4$ on a $u_n \geq 4$

   (b) On a pour tout $n \geq 4$:

$$u_n \geq 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{3}u_n \geq 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{3}u_n + n - 2 \geq n - 2 \Longleftrightarrow u_{n+1} \geq n - 2$$

   Or, $n \geq 4 \Longleftrightarrow n + 1 \geq 5$, par conséquent pour tout $n \geq 5$ on a :

$$u_n \geq n - 1 - 2 = n - 3$$

   (c) pour tout $n \geq 5$ on a :

$$u_n \geq n - 1 - 2 = n - 3$$

   Or, $\lim_{n\to+\infty} n - 3 = +\infty \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
3. On définit la suite (v_n) par, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = -2u_n + 3n - \frac{21}{2}$$

(a)

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= -2u_{n+1}+3(n+1)-\frac{21}{2} \\ &= -\frac{2}{3}u_n-2n+4+3n+3-\frac{21}{2} \\ &= -\frac{2}{3}u_n+n+7-\frac{21}{2} \\ &= -\frac{2}{3}u_n+n-\frac{7}{2} \\ &= -2\times\frac{1}{3}u_n+3n\times\frac{1}{3}-\frac{21}{2}\times\frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{3}\left(-2u_n+3n-\frac{21}{2}\right) \\ &= \frac{1}{3}v_n \end{aligned}$$

donc la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $v_0=-\frac{25}{2}$.

(b)

$$\begin{aligned} & v_n=-2u_n+3n-\frac{21}{2} \\ \iff\ & 2u_n=-v_n+3n-\frac{21}{2} \\ \iff\ & u_n=-\frac{1}{2}v_n+\frac{3}{2}n-\frac{21}{4} \end{aligned}$$

Or, d'après la question précédente, on a :

$$v_n=v_0\times q^n=-\frac{25}{2}\times\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

d'où :

$$u_n=-\frac{1}{2}\times\left(-\frac{25}{2}\times\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)+\frac{3}{2}n-\frac{21}{4}$$

et donc pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$u_n=\frac{25}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{3}{2}n-\frac{21}{4}$$

(c)

$$\begin{aligned} S_n &= \textstyle\sum_{k=0}^n u_k \\ &= u_0+u_1+\cdots+u_{n-1}+u_n \\ &= \frac{25}{4}\left(\left(\frac{1}{3}\right)^0+\left(\frac{1}{3}\right)^1+\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)+\frac{3}{2}\left(0+1+\cdots+n-1+n\right)-\frac{21}{4}(1+1+\cdots+1) \\ &= \frac{25}{4}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}\right)+\frac{3n}{4}\left(1+n\right)-(n+1)\frac{21}{4} \\ &= \frac{75}{8}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)+(n+1)\frac{3n-21}{4} \end{aligned}$$