Correction du devoir Maison 3

Exercice 1. (3,5 points)

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 4 \end{cases}$$

et la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$v_n = u_n - 6$$

1. Pour tout entier n, calculer v_{n+1} en fonction de v_n. Quelle est la nature de la suite (v_n) ?

$$\begin{aligned} \frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{u_{n+1}-6}{u_n-6} \\ &= \frac{\frac{1}{3}u_n+4-6}{u_n-6} \\ &= \frac{\frac{1}{3}u_n-2}{u_n-6} \\ &= \frac{1}{3}\frac{u_n-6}{u_n-6} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

   Par conséquent

$$v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n$$

   Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$.

2. On a $v_0 = u_0 - 6 = -5$, par conséquent $v_n = -5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$. Tous les termes de cette suite sont négatifs et de plus :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{3} < 1 \Longleftrightarrow v_{n+1} > v_n$$

   (v_n) est une suite strictement croissante.

3. En déduire le sens de variation de (u_n).
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_{n+1} - u_n = v_{n+1} - 6 - v_n + 6 = v_{n+1} - v_n > 0$, ce qui prouve que $u_{n+1} > u_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc que la suite (u_n) est croissante.

4. Démontrer, de deux manières différentes, que pour tout entier naturel n :

$$u_n = -5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + 6$$

   Première méthode :
   Comme $v_n = -5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$ et comme $v_n = u_n - 6$ on a :

$$u_n = v_n + 6 = -5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + 6$$

   Deuxième méthode :
   On raisonne par récurrence et on note $\mathscr{P}(n)$ la propriété $u_n = -5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + 6$

- *Initialisation* : pour $n = 0$ on a $-5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^0 + 6 = -5 + 6 = 1 = u_0$, par conséquent $\mathscr{P}$ est vraie au rang 0.
- *Hérédité* : Supposons que la propriété $\mathscr{P}$ soit vraie au rang n et montrons que $\mathscr{P}$ est vraie au rang $n+1$.
  D'après l'hypothèse de récurrence on a $u_n = -5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + 6$.
  Or, $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 4 = \frac{1}{3}\left[-5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + 6\right] + 4 = -5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} + 2 + 4 = -5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} + 6$
  Par conséquent $\mathscr{P}$ est vraie au rang $n+1$.
- *Conclusion* : On vient de démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = -5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + 6$.

5. Etudier la convergence de la suite (u_n).
   On a
   $$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$$
   Par conséquent :
   $$\lim_{n \to +\infty} u_n = 6$$

Exercice 2. (1,5 points)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}}$$

Montrer, par récurrence, que pour tout $n \geq 1$ on a $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq u_n \leq 1$

Preuve

Notons $\mathscr{P}(n)$, pour $n \geq 1$, la propriété $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq u_n \leq 1$

- *Initialisation* : pour $n = 1$ on a $u_1 = \sqrt{\frac{1}{2}}$ et on a bien :
  $$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq u_1 \leq 1$$
  Donc $\mathscr{P}$ est vraie au rang 0.
- *Hérédité* : Supposons que la propriété $\mathscr{P}$ soit vraie au rang n et montrons que $\mathscr{P}$ est vraie au rang $n+1$.
  D'après l'hypothèse de récurrence on a $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq u_n \leq 1$.
  De plus
  $$u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}} < \sqrt{\frac{1+1}{2}} = 1$$
  Mais encore :
  $$u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}} \geq \sqrt{\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}} \geq \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
  La propriété $\mathscr{P}$ est donc vraie au rang $n+1$.
- *Conclusion* : On a donc démontré par récurrence que :
  $$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq u_n \leq 1$$