Correction du devoir Maison 2

Exercice 1. (5 points)

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ (2 cm pour une unité graphique).
On appelle Γ le cercle de centre O et de rayon 1.
On fera une figure que l'on complétera tout au long de l'exercice.
On appelle f l'application du plan privé du point O dans P qui, à tout point M différent de O, d'affixe z, associe le point $M' = f(M)$ d'affixe z' définie par :

$$z' = z + i - \frac{1}{z}$$

1. On considère les points A et B d'affixes respectives $a = i$ et $b = e^{i\frac{\pi}{6}}$ et leurs images A' et B' par f d'affixes respectives a' et b'.
   (a) On a
   $$a' = i + i - \frac{1}{i} = 2i - \frac{1}{i} = 2i + i = 3i$$
   Et
   $$b' = e^{i\frac{\pi}{6}} + i - \frac{1}{e^{i\frac{\pi}{6}}} = e^{i\frac{\pi}{6}} + i - e^{-i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} + i - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = 2i$$
   .
   (b) Placer les points A, A', B et B'.
   (c)
   $$\frac{-b}{b'-b} = \frac{-e^{i\frac{\pi}{6}}}{2i - e^{i\frac{\pi}{6}}} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i}{2i - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i} = \frac{-\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i}{-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}i} = \frac{\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i\right)\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{2}i\right)}{\dfrac{3}{4} + \dfrac{9}{4}}$$
   i.e :
   $$\frac{-b}{b'-b} = \frac{\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i\right)\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{2}i\right)}{3} = \frac{\dfrac{3}{4} + \dfrac{3\sqrt{3}}{4}i + \dfrac{\sqrt{3}}{4}i - \dfrac{3}{4}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}i$$
   (d) D'après la question précédente on a :
   $$\mid \frac{z_O - z_B}{z_{B'} - z_B} \mid = \frac{\sqrt{3}}{3} \Longleftrightarrow \mid z_O - z_B \mid = \frac{\sqrt{3}}{3} \mid z_{B'} - z_B \mid \Longleftrightarrow \mid z_{\overrightarrow{BO}} \mid = \frac{\sqrt{3}}{3} \mid z_{\overrightarrow{BB'}} \mid \Longleftrightarrow BO = \frac{\sqrt{3}}{3} BB'$$
   Or, $BO = \mid b \mid = 1 \Longrightarrow BB' = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$. De plus $OB' = 2$.
   D'après la réciproque du théorème de Pythagore (comme $1 + 3 = 2^2$) on conclut que le triangle OBB' est rectangle en B.
2. Le but de cette question est de déterminer l'ensemble (E) des points du plan P privé de O qui ont pour image O par f.
   (a) Démontrons que, pour tout nombre complexe z :
   $$z^2 + iz - 1 = \left(z + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)\left(z - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$
   $$\left(z + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)\left(z - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = z^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}z + \frac{1}{2}iz + \frac{\sqrt{3}}{2}z - \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i + \frac{1}{2}iz - \frac{\sqrt{3}}{4}i - \frac{1}{4} = z^2 + iz - 1$$
   (b) Les affixes des points de l'ensemble (E) vérifient $z' = 0$ i.e :
   $$0 = z + i - \frac{1}{z} \Longleftrightarrow z^2 + iz - 1 = 0 \Longleftrightarrow \left(z + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)\left(z - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 0 \Longleftrightarrow z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \quad \text{ou} \quad z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

(c) (E) est un ensemble qui contient deux points d'affixe z_1 et z_2 où :

$$z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = \cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6} = e^{i\frac{7\pi}{6}}$$

$$z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = \cos\frac{-\pi}{6} + i\sin\frac{-\pi}{6} = e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

Et donc $\mid z_1 \mid = \mid z_2 \mid = 1$, ce qui prouve que les points de l'ensemble (E) appartiennent à Γ

3. Soit θ un réel.

(a) Si $z = e^{i\theta}$, alors $z' = e^{i\theta} + i - \frac{1}{e^{i\theta}} = e^{i\theta} + i - e^{-i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta + i - \cos\theta + i\sin\theta = (2\sin\theta + 1)i$

(b) Si M appartient au cercle Γ alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$, et donc en vertu de la question précédente on a :

$$z' = (2\sin\theta + 1)i$$

Dans ce cas z' est un imaginaire pur et donc se trouve sur l'axe imaginaire, de plus comme

$$-1 \leq 2\sin\theta + 1 \leq 3$$

M' se trouve sur le segment $[A'C]$.