# Correction du devoir maison 1

**Exercice 1.** (5 points)

La plan complexe est muni d'un repère $(O;\vec{u},\vec{v})$. On associe à tout nombre complexe $z$ différent de $1+i$, le complexe :

$$Z=\frac{z+i}{z-1-i}$$

1. Déterminer $\Gamma_1$, ensemble des points $M$ d'affixe $z$ différente de $1+i$ tels que $\mid Z\mid=1$.
2. Déterminer $\Gamma_2$, ensemble des points $M$ d'affixe $z$ différente de $1+i$ tels que $Z$ est réel.
3. Pour tout complexe $z$ différent de $1+i$, on note $M$ le point d'affixe $z$ et $M'$ le point d'affixe $Z$.
   (a) Montrer que pour tout complexe $z$ d'affixe différente de $1+i$, $\mid Z-1\mid=\dfrac{\sqrt{5}}{\mid z-1-i\mid}$
   (b) En déduire que lorsque $M$ parcourt le cercle de centre $\Omega$ d'affixe $1+i$ et de rayon 2, $M'$ reste sur un cercle dont on précisera le rayon.

***Solutions*** **:**

1. Dans un premier temps appelons $\Omega$ le point d'affixe $z_\Omega=1+i$ et $B$ le point d'affixe $z_B=-i$. Dans ce cas pour tout $z\neq z_\Omega$ on a :

$$\begin{array}{cc}
 & \mid Z\mid=1\\
\Longleftrightarrow & \mid \dfrac{z+i}{z-1-i}\mid=1\\
\Longleftrightarrow & \dfrac{\mid z+i\mid}{\mid z-1-i\mid}=1\\
\Longleftrightarrow & \dfrac{\mid z-z_B\mid}{\mid z-z_\Omega\mid}=1\\
\Longleftrightarrow & \dfrac{\mid z_{\overrightarrow{BM}}\mid}{\mid z_{\overrightarrow{\Omega M}}\mid=1}\\
\Longleftrightarrow & \dfrac{BM}{\Omega M}=1\\
\Longleftrightarrow & BM=\Omega M
\end{array}$$

Par conséquent, $\Gamma_1$ est la médiatrice du segment $[\Omega B]$.

2. Je propose ici une autre manière de répondre à cette question que celle vu en cours, plus élégante, qui utilise les arguments :

$$\begin{array}{cc}
 & Z \text{ est réel}\\
\Longleftrightarrow & arg(Z)=0[\pi]\\
\Longleftrightarrow & arg\left(\dfrac{z+i}{z-1-i}\right)=0[\pi]\\
\Longleftrightarrow & arg(z+i)-arg(z-1-i)=0[\pi]\\
\Longleftrightarrow & arg(z-z_B)=arg(z-z_\Omega)[\pi]\\
\Longleftrightarrow & (\overrightarrow{u};\overrightarrow{BM})=(\overrightarrow{u};\overrightarrow{\Omega M})
\end{array}$$

$\Gamma_2$ est alors la droite $(A\Omega)$ privé du point $\Omega$ (faire un dessin pour s'en convaincre), ce qu'on retrouve en procédant comme fait en cours :

***Solutions*** **:**

2. Notons $z = x + iy$ où $x$ et $y$ sont deux nombres réels. On a pour $z \neq z_\Omega$ et pour $z \neq \overline{z_\Omega}$ :

$$\begin{array}{cc} & Z \text{ est réel} \\ \Longleftrightarrow & Z = \bar{Z} \\ \Longleftrightarrow & \dfrac{z+i}{z-1-i} = \overline{\dfrac{z+i}{z-1-i}} \\ \Longleftrightarrow & \dfrac{z+i}{z-1-i} = \dfrac{\bar{z}-i}{\bar{z}-1+i} \\ \Longleftrightarrow & (z+i)(\bar{z}-1+i) = (z-1-i)(\bar{z}-i) \\ \Longleftrightarrow & z\bar{z} - z + iz + i\bar{z} - i - 1 = z\bar{z} - iz - \bar{z} + i - i\bar{z} - 1 \\ \Longleftrightarrow & -z + iz + i\bar{z} - i = -iz - \bar{z} + i - i\bar{z} \\ \Longleftrightarrow & -z + 2iz + 2i\bar{z} + \bar{z} - 2i = 0 \\ \Longleftrightarrow & -x - iy + 2ix - 2y + 2ix + 2y + x - iy - 2i = 0 \\ \Longleftrightarrow & 4ix - 2iy - 2i = 0 \\ \Longleftrightarrow & 2x - y - 1 = 0 \\ \Longleftrightarrow & y = 2x - 1 \end{array}$$

Remarquons que pour $z = \overline{z_\Omega}$,

$$Z = \frac{1-i+i}{1-i-1-i} = \frac{1}{-2i} = -\frac{1}{2i} = \frac{i}{2} \notin \mathbb{R}$$

Ainsi $\Gamma_2$ est la droite d'équation $y = 2x - 1$ privé du point $\Omega$, qui est bien la droite $(A\Omega)$.

3. (a) pour tout complexe $z$ d'affixe différente de $1+i$ on a :

$$\begin{aligned} \mid Z - 1 \mid = & \quad \mid \frac{z+i}{z-1-i} - 1 \mid \\ = & \mid \frac{z+i}{z-1-i} - \frac{z-1-i}{z-1-i} \mid \\ = & \mid \frac{z+i-z+1+i}{z-1-i} \mid \\ = & \frac{\mid 1+2i \mid}{\mid z-1-i \mid} \\ = & \frac{\sqrt{1+4}}{\mid z-1-i \mid} \\ = & \frac{\sqrt{5}}{\mid z-1-i \mid} \end{aligned}$$

   (b) Si $M$ appartient à un tel cercle alors $\Omega M = 2 \Longleftrightarrow \mid z - z_\Omega \mid = 2 \Longleftrightarrow \mid z - 1 - i \mid = 2$
   Par conséquent, en utilisant la question précédente et en notant $C$ le point d'affixe $z_C = 1$ on a :

$$\mid Z - 1 \mid = \frac{\sqrt{5}}{2} \Longleftrightarrow M'C = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

   Par conséquent $M'$ appartient au cercle de centre $C$ et de rayon $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ lorsque $M$ est sur le cercle de centre $\Omega$ et de rayon 2

2 Encore une manière de répondre à cette question (qui me paraît être la plus simple des trois), proposée par Raphaelle S. :
Notons $z_A = -1$ et $z_B = 1 + i$.
$Z$ est réeel.

On a $Z = \dfrac{z_M - z_A}{z_M - z_B}$, soit

$$\frac{z_M - z_A}{z_M - z_B} = k \qquad \text{avec } k \in \mathbb{R}$$

alors $z_M - z_A = k(z_M - z_B) \Longrightarrow \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{BM}$
Les deux vecteurs sont donc colinéaires. L'ensemble $\Gamma_2$ des points $M$ d'affixe $z$ différente de $1 + i$ tels que $Z$ est réel et que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$ soient colinéaires est la droite $(AB)$ sans le point $B$.