CORRECTION DU DM 18

On se propose d'étudier une modélisation d'une tour de contrôle de trafic aérien, chargée de surveiller deux routes aériennes représentées par deux droites de l'espace.
L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ d'unité 1 km. Le plan $\left(O,\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\right)$représente le sol.
Les deux « routes aériennes »à contrôler sont représentées par deux droites (D_1) et (D_2) , dont on connaît des représentations paramétriques :

$$(D_1)\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 3+a \\ y &=& 9+3a \\ z &=& 2 \end{array}\right. \quad \text{avec} \quad a\in\mathbb{R} \qquad (D_2)\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 0,5+2b \\ y &=& 4+b \\ z &=& 4-b \end{array}\right. \quad \text{avec} \quad b\in\mathbb{R}$$

1. (a) Un vecteur directeur de (D_1), $\overrightarrow{u_1}$ a par exemple pour coordonnées $(1;3;0)$ et un vecteur directeur de (D_2), $\overrightarrow{u_2}$ a par exemple pour coordonnées $(2;1;-1)$.

   (b) (D_1) et (D_2) ne sont pas coplanaires si et seulement si elles ne sont ni parallèles, ni sécantes.
   Montrons dans un premier qu'elles ne sont pas parallèles.
   On a $(D_1)//(D_2) \Longleftrightarrow \overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ colinéaires.
   Pour passer de l'abscisse de $\overrightarrow{u_1}$ à celle de $\overrightarrow{u_2}$ on multiplie par 2 et pour passer de l'ordonnée de $\overrightarrow{u_1}$ à celle de $\overrightarrow{u_2}$ on divise par 3, ainsi les coordonnées de $\overrightarrow{u_1}$ et de $\overrightarrow{u_2}$ ne sont pas proportionnelles, ce qui montre que $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ ne sont pas colinéaires et par conséquent que (D_1) et (D_2) ne sont pas parallèles.
   Montrons dans un second temps que (D_1) et (D_2) ne sont pas sécantes.
   Si tel était le cas alors le système (S) suivant aurait des solutions :

$$(S):\left\{\begin{array}{l} 3+a=0,5+2b \\ 9+3a=4+b \\ 2=4-b \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3+a=0,5+2b \\ 9+3a=4+b \\ b=2 \end{array}\right.$$

   En remplaçant b par 2 dans la première équation on trouve $3+a=0,5+4 \Longleftrightarrow a=1,5$ et en remplaçant b par 2 dans la deuxième équation on trouve $9+3a=4+2 \Longleftrightarrow 3a=-3 \Longleftrightarrow a=-1$. a ne peut-être égal à la fois à $1,5$ et -1, par conséquent le système (S) n'admet aucune solution, ce qui prouve que (D_1) et (D_2) ne sont pas sécantes.
   Conclusion : (D_1) et (D_2) ne sont ni parallèles, ni sécantes, donc (D_1) et (D_2) sont non coplanaires.

2. On veut installer au sommet S de la tour de contrôle, de coordonnées $S(3\,;4\,;0,1\,)$, un appareil de surveillance qui émet un rayon représenté par une droite notée (R) . Soit (P_1) le plan contenant S et (D_1) et soit (P_2) le plan contenant S et (D_2).

   (a) (P_1) admet une équation de la forme :

$$ax+by+cz+d=0$$

   or, $S\in(P_1) \Longrightarrow 3a+4b+0,1c+d=0$. De plus (P_1) contient (D_1), pour $a=0$ (dans l'équation paramétrique de (D_1)) nous obtenons un premier point de (D_1), disons $A(3;9;2)$ et pour $a=-3$ (dans l'équation paramétrique de (D_1)) nous obtenons un second point de (D_1), disons $B(0;0;2)$, A et B sont aussi des points de (P_1) donc :

$$3a+9b+2c+d=0 \qquad \text{et} \qquad 2c+d=0$$

   Fixons $d=-1$, on obtient alors le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} 3a+4b+0,1c=1 \\ 3a+9b+2c=1 \\ 2c=1 \Longrightarrow c=\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3a+4b=0,95 \\ 3a+9b=0 \\ c=\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3a+4b=0,95 \\ 5b=-0,95 \Longrightarrow b=-0,19 \\ 2c=1 \Longrightarrow c=\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3a-0,76=0,95 \Longrightarrow a=0,57 \\ b=-0,19 \\ 2c=1 \Longrightarrow c=\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

Ainsi (P_1) a pour équation :

$$0,57x-0,19y+0,5z-1=0 \iff 57x-19y+50z-100=0$$

Déterminons alors l'intersection de (P_1) avec (D_2) :

$$M(x;y;z)\in(P_1)\cap(D_2) \iff 57(0,5+2b)-19(4+b)+50(4-b)-100=0 \iff 45b+52,5=0 \iff b=\frac{-52,5}{45}$$

Le système admettant une solution, on peut en conclure que (P_1) et (D_2) sont sécants.
Notes : Il s'agit ici d'une méthode très calculatoire, lourde même en calcul, mais qui ne nécessite aucune réflexion, on aurait pu agir de manière très différente, pour savoir comment observons la réponse de la question suivante :

(b) Les plans (P_1) et (P_2) sont sécants, puisqu'ils ont un point en commun S. De plus ils sont distincts puisque ils contiennent deux droites non coplanaires, par conséquent leur intersection est une droite, disons Δ. Δ et (D_2) sont coplanaires puisqu'incluses dans le plan (P_2) donc elles sont soit parallèles soit sécantes. Admettons un instant qu'elles sont sécantes, dans ce cas (D_2) coupe Δ qui est contenu dans le plan (P_1), par conséquent (D_2) et (P_1) sont sécants.
Ne reste plus qu'à démontrer que (D_2) et Δ ne sont pas parallèles. Allons-y, raisonnons par l'absurde :
Si Δ et (D_2) sont parallèles alors $\overrightarrow{u_2}(2;1;-1)$ dirige Δ, ce qui nous donne une représentation paramétrique de Δ :

$$\Delta : \begin{cases} x &= 3+2t \\ y &= 4+t \\ z &= 0,1-t \end{cases} \quad \text{avec} \quad t\in\mathbb{R}$$

Examinons l'intersection des droites (D_1) et Δ qui sont coplanaires (puisque dans (P_1) donc soit sécantes, soit parallèles) :

$$\begin{cases} 3+a=3+2t \\ 9+3a=4+t \\ 2=0,1-t \end{cases} \iff \begin{cases} a=2t=-3,8 \\ 3a=-5-1,9=-6,9 \Longrightarrow a=-2,3 \\ t=-1,9 \end{cases}$$

a ne peut-être égale à la fois à $-2,3$ et à $-3,8$, par conséquent Δ et (D_1) sont parallèles. Comme on a aussi Δ parallèle à (D_2), par conséquent $(D_1)//(D_2)$, ce qui est absurde. Ainsi Δ et (D_2) ne sont pas parallèles.

(c) Les techniciens ayant toujours raison (...) cette affirmation est vraie. Et bien voilà c'était facile cette question ! Bon plus sérieusement, on vient de montrer dans la question précédente que Δ et (D_2) sont deux droites sécantes. Le même raisonnement assure que Δ et (D_1) sont aussi sécantes, ainsi la droite Δ convient.