Correction du DM 17

1. Les plans (P) et (Q) ont pour vecteurs normaux respectifs $\overrightarrow{n}\,(0;2;1)$ et $\overrightarrow{n'}\,(0\ ;\ 1\ ;\ -2)$. On a $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{n'}=0$, donc $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{n'}$ et par suite, les plans (P) et (Q) sont perpendiculaires.
2. L'intersection des plans (P) et (Q) est une droite (plans perpendiculaires).
   $A\in(P)$ car $2\times0+6-6=0$ et $A\in(Q)$ car $0-12+12=0$, donc $A\in(P)\cap(Q)$;
   on montre de la même façon que $I\in(P)\cap(Q)$.
   Les points A et I étant distincts, la droite d'intersection des plans (P) et (Q) est donc la droite (AI), c'est-à-dire la droite (D).
3. Soit $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ un point de l'espace. M appartient à l'axe $\left(O;\overrightarrow{j}\right)$ si et seulement si $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.

   M appartient à l'axe $\left(O;\overrightarrow{j}\right)$ et au plan (P) si et seulement si $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \\ 2y+z-6 = 0 \end{cases}$ c'est-à-dire si et seulement si

   $\begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \\ z = 0 \end{cases}$. Le plan (P) coupe donc l'axe $\left(O;\overrightarrow{j}\right)$ au point $B(0\ ;\ 3\ ;\ 0)$.
   Un raisonnement analogue montre que le plan (Q) coupe l'axe $\left(O;\overrightarrow{j}\right)$ en un point $C(0\ ;\ -12\ ;\ 0)$.
4. On a $\overrightarrow{AC}\,(-3\ ;\ -12\ ;\ -6)$ donc le plan (T) a une équation cartésienne de la forme : $-3x-12y-6z+d=0$. Et $B(0\ ;3\ ;0)\in(T)$, donc $0-12\times3-0+d=0$, d'où $d=36$. Le plan (T) a donc pour équation cartésienne $-3x-12y-6z+36=0$, ou encore, en simplifiant par -3 : $x+4y+2z-12=0$.
5. La droite (OA) passe par $O(0\ ;\ 0\ ;\ 0)$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{OA}\,(3\ ;\ 0\ ;\ 6)$. Une représentation paramétrique de (OA) est donc : $\begin{cases} x = 3t \\ y = 0 \quad (t\in\mathbb{R}) \\ z = 6t \end{cases}$.
   Un point M appartient à la droite (OA) et au plan (T) si et seulement si il existe un réel t tel que $M(3t\ ;\ 0\ ;\ 6t)$ et $(3t)+4\times0+2\times(6t)-12=0$, ce qui donne une unique valeur : $t=\dfrac{4}{5}$. La droite (OA) et le plan (T) sont donc sécants en un point H qui a pour coordonnées $\left(3\times\dfrac{4}{5}\ ;\ 0\ ;\ 6\times\dfrac{4}{5}\right)$, c'est-à-dire $H\left(\dfrac{12}{5}\ ;\ 0\ ;\ \dfrac{24}{5}\right)$.
6. Les points B et H appartiennent au plan (T) qui a pour vecteur normal $\overrightarrow{OA}$, donc $(BH)\perp(AC)$: le point H appartient à la hauteur issue de B du triangle ABC.
   $\overrightarrow{AH}\left(-\dfrac{3}{5};0;-\dfrac{6}{5}\right)$ et $\overrightarrow{BC}\,(0\ ;\ -15\ ;\ 0)$, donc $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ et $(AH)\perp(BC)$: le point H appartient donc à la hauteur issue de A du triangle ABC.
   Le point H est donc l'orthocentre du triangle ABC.