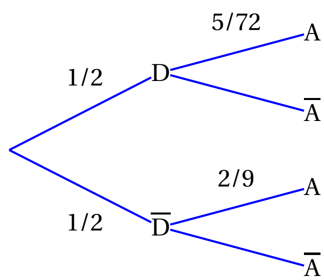
CORRECTION DU DM 16

1. (a) Il s'agit d'une expérience à deux issues avec une probabilité de succès $p = \frac{1}{6}$ et une probabilité d'échec $q = \frac{5}{6}$ que l'on répète de manière indépendante 3 fois. X représente le nombre de succés et suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = \frac{1}{6}$.

   (b) L'espérance d'une loi binomiale de paramètres n et p est np. Donc
   $\mathrm{E(X)} = 3\frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

   (c) $\mathrm{P(X = 2)} = \binom{3}{2} p^2 q^1 = 3 \times \frac{5}{6^3} = \frac{5}{72}$.

2. (a)



   L'événement « choisir le dé équilibré et obtenir exactement deux six »correspond à $\mathrm{D} \cap \mathrm{A}$
   $p(\mathrm{D} \cap \mathrm{A}) = p(\mathrm{D}) \times p_{\mathrm{D}}(\mathrm{A}) = \frac{1}{2} \times \frac{5}{72} = \frac{5}{144}$.
   L'événement « choisir le dé truqué et obtenir exactement deux six »correspond à $\overline{\mathrm{D}} \cap \mathrm{A}$.
   $p(\overline{\mathrm{D}} \cap \mathrm{A}) = p(\overline{\mathrm{D}}) \times p_{\overline{\mathrm{D}}}(\mathrm{A})$.
   On utilise un raisonnement analogue au 1.c.,
   $p_{\overline{\mathrm{D}}}(\mathrm{A}) = \binom{3}{2} p'^2 q'^1$ où $p' = \frac{1}{3}$. Donc $p_{\overline{\mathrm{D}}}(\mathrm{A}) = \frac{2}{9}$ et $p(\overline{\mathrm{D}} \cap \mathrm{A}) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{9} = \frac{1}{9}$.

   (b) On en déduit que $p(\mathrm{A}) = p(\mathrm{D} \cap \mathrm{A}) + p(\overline{\mathrm{D}} \cap \mathrm{A}) = \frac{5}{144} + \frac{16}{144} = \frac{21}{144} = \frac{7}{48}$.

   (c) Il s'agit de calculer $p(\overline{\mathrm{D}} \text{ sachant A}) = \frac{p(\overline{\mathrm{D}} \cap \mathrm{A})}{p(\mathrm{A})} = \frac{1}{9} \times \frac{48}{7} = \frac{16}{21}$.

3. (a) $p_{\mathrm{D}}(\mathrm{B}_n) = 1 - p_{\mathrm{D}}(\text{« n'obtenir aucun 6 »}) = 1 - q^n = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$. De même $p_{\overline{\mathrm{D}}}(\mathrm{B}_n) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$. On applique alors la formule des probabilités totales :
   $p_n = p(\mathrm{B}_n) = p(\mathrm{D}) \times p_{\mathrm{D}}(\mathrm{B}_n) + p(\overline{\mathrm{D}}) \times p_{\overline{\mathrm{D}}}(\mathrm{B}_n) = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^n - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

   (b) $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ car $\frac{5}{6}$ et $\frac{2}{3}$ appartiennent à $]-1;1[$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 1$. Ce résultat est prévisible car, quel que soit le dé, à condition de jouer suffisamment longtemps, on a une quasi certitude d'obtenir au moins une fois un 6. (ici, $p_{22} > 0,99$ et $p_{100} \approx 1$).