Correction du DM 14

Exercice 1.

1. On calcule $J_{n+1} - J_n = \int_1^{n+1} e^{-t}\sqrt{1+t}\,dt - \int_1^n e^{-t}\sqrt{1+t}\,dt = \int_n^{n+1} e^{-t}\sqrt{1+t}\,dt$.
   Pour $t \in [n\,;\,n+1]$, $\sqrt{1+t} > 0$ et $e^{-t} > 0$.
   L'intégrale d'une fonction positive sur un intervalle où $n < n+1$ est positive, donc $J_{n+1} - J_n \geqslant 0 \iff J_{n+1}J_n \geqslant J_n$, ce qui montre que la suite (J_n) est croissante.
2. (a) Posons $u = t+1$, donc $u \geqslant 2$; or $0 \leqslant \sqrt{u} \leqslant u$, sur $[2\,;\,+\infty]$, car $0 \leqslant u \leqslant u^2$.
   Remarque : en fait relation est vraie pour $t \geqslant 0$.
   (b) $\sqrt{t+1} \leqslant t+1 \iff \sqrt{t+1}e^{-t} \leqslant (t+1)e^{-t}$ ce qui entraîne que $\int_1^n e^{-t}\sqrt{1+t}\,dt \leqslant \int_1^n e^{-t}(1+t)\,dt \iff J_n \leqslant I_n$.
   (c) Intégrons par parties :

$$\begin{cases} u(t) &= t+1 \\ dv(t) &= e^{-t} \end{cases} \qquad \begin{cases} du(t) &= 1 \\ v(t) &= -e^{-t} \end{cases}$$

   Les fonctions dérivées ci-dessus étant continues $I_n = \left[-(t+1)e^{-t}\right]_1^n - \int_1^n -e^{-t}dt = \left[-(t+1)e^{-t}\right]_1^n + \left[e^{-t}\right]_1^n = \left[-(t+2)e^{-t}\right]_1^n = -(n+2)e^{-n} + 3e^{-1}$.
   Comme $(n+2)e^{-n} \geqslant 0$, I_n est donc majorée par $3e^{-1}$
   (d) L'inégalité démontrée au **b.** montre que $J_n \leqslant 3e^{-1}$.
   La suite (J_n) est donc majorée et croissante : elle a donc une limite inférieure ou égale à $3e^{-1}$.

Exercice 2.

Partie A

1. f' étant définie et continue sur $[0\,;\,1]$ est intégrable sur cet intervalle et
   $\int_0^1 f'(x)\,dx = \left[f(x)\right]_0^1 = f(1) - f(0) = \frac{1}{2e} - 0 = \frac{1}{2e}$.
2. On sait que sur $[0\,;\,1]$, la courbe $(\mathscr{C})$ est au dessus du segment [OA] ; l'intégrale de f sur $[0\,;\,1]$ égale à l'aire de la surface limitée par $(\mathscr{C})$ et les droites $y=0$, $x=0$ et $x=1$, est supérieure à l'aire du triangle OIA (avec I(1 ; 0)). Cette aire est égale à $\frac{OI \times IA}{2} = \frac{1 \times \frac{1}{2e}}{2} = \frac{1}{4e}$.
   Donc $\int_0^1 f(x)\,dx \geqslant \frac{1}{4e}$.

Partie B

$$f(x) = \frac{xe^{-x}}{x^2+1}.$$

1. On sait que $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$, $\lim_{x\to+\infty} x^n e^{-x} = 0$, quel que soit $n \in \mathbb{N}$.
   De plus $\lim_{x\to+\infty} x^2 = 0$, donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
   L'axe des abscisses est donc asymptote horizontale à $\mathscr{C}$ au voisinage de plus l'infini.
2. g fonction polynôme est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ et sur cet intervalle $g'(x) = 3x^2 + 2x + 1$.
   Or $3x^2 + 2x + 1 = 3\left(x^2 + \frac{2}{3}x\right) + 1 = 3\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3} + 1 = 3\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} > \frac{2}{3} > 0$
   Conclusion $g'(x) > 0 \Rightarrow g$ est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.
   On a $g(0) = -1$ et $g(1) = 2$. Comme la fonction est croissante sur $[0\,;\,1]$, l'équation $g(x) = 0$ a une solution unique sur $[0\,;\,1]$, donc sur $[0\,;\,+\infty[$.

3. (a) f est de la forme $\dfrac{u}{v}$, avec $u = x\mathrm{e}^{-x}$ et $v = x^2+1$. De $u' = \mathrm{e}^{-x}(1-x)$, $v' = 2x$ et $f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, on en déduit que $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}(1-x)\left(x^2+1\right) - x\mathrm{e}^{-x}\times 2x}{\left(x^2+1\right)^2}$ qui est du signe du numérateur donc de $\mathrm{e}^{-x}(1-x)\left(x^2+1\right) - x\mathrm{e}^{-x}\times 2x =$
$\mathrm{e}^{-x}\left(x^2+1-x^3-x-2x^2\right) =$
$\mathrm{e}^{-x}\left(-x^3-x^2-x+1\right)$ ou encore de $-x^3-x^2-x+1 = -\left(x^3+x^2+x-1\right) = -g(x)$.
f' et g ont donc des signes contraires.

(b) On a vu que sur $[0\,;\,\alpha]$, $g(x) < 0$, donc $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ est croissante sur $[0\,;\,\alpha]$ et sur $[\alpha\,;\,+\infty[$, $g(x) > 0$, donc $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ est décroissante sur $[\alpha\,;\,+\infty[$.

4. (a) Il est évident que quel que soit $x \in [0\,;\,+\infty[$, $(x-1)^2 \geqslant 0 \iff x^2+1-2x \geqslant 0 \iff x^2+1 \geqslant 2x \iff \dfrac{1}{2} \geqslant \dfrac{x}{x^2+1} \iff \dfrac{x}{x^2+1} \leqslant \dfrac{1}{2}$.

(b) On a $x \geqslant 0 \iff -x \leqslant 0 \iff \mathrm{e}^{-x} \leqslant \mathrm{e}^0$ (par croissance de la fonction exponentielle) $\iff \mathrm{e}^{-x} \leqslant 1 \iff \dfrac{x\mathrm{e}^{-x}}{x^2+1} \leqslant \dfrac{x}{x^2+1}$.
En posant $u(x) = x^2+1$, u est dérivable et $u'(x) = 2x$.
Donc $\dfrac{x}{x^2+1} = \dfrac{1}{2}\dfrac{u'}{u}$.
On a donc $u_n = \displaystyle\int_n^{2n} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_n^{2n} \frac{x\mathrm{e}^{-x}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_n^{2n} \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$. (d'après la question **4. a.**)
Or $\displaystyle\int_n^{2n} \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}\right]_n^{2n} = \frac{1}{2}\left[-\mathrm{e}^{2n}+\mathrm{e}^{-n}\right]$.
Conclusion $u_n \leqslant \dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-n} - \mathrm{e}^{-2n}\right)$.

(c) Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-n} = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-2n} = 0$, on en déduit par application du théorème des « gendarmes » :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

ANNEXE

Exercice 2

Cette page ne sera pas à rendre avec la copie