CORRECTION DU DM 13 : DIFFÉRENTES MANIÈRES DE CALCULER UNE INTÉGRALE

Exercice 1. On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = x^2 - 3x + 3 - \frac{1}{x}$$

1. Une primitive de f sur $]0;+\infty[$ est par exemple :

$$\mathrm{F}(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 3x - \ln x$$

2. Par conséquent

$$\int_1^4 f(x)dx = [\mathrm{F}(x)]_1^4 = \mathrm{F}(4) - \mathrm{F}(1) = \frac{64}{3} - 24 + 12 - \ln 4 - \frac{1}{3} + \frac{3}{2} - 3 = \frac{128-2+9}{6} - \ln 4 - 15 = \frac{135}{6} - \ln 4 - 15 = \frac{15}{2} - 2\ln 2$$

3. On a, pour tout $x \in]0;+\infty[$ on a :

$$f(x) = x^2 - 3x + 3 - \frac{1}{x} = \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x} = \frac{(x-1)^3}{x}$$

4. A l'aide d'une intégration par parties, on trouve

$$\int_1^4 3(x-1)^2 \ln x dx = [(x-1)^3 \ln x]_1^4 - \int_1^4 \frac{(x-1)^3}{x} dx = 27\ln 4 - \int_1^4 f(x)dx = 54\ln 2 - \frac{15}{2} + 2\ln 2 = 56\ln 2 - \frac{15}{2}$$

Exercice 2. On considère la suite (I_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\mathrm{I}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n dt$$

1. $\mathrm{I}_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^0 dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dt = \frac{\pi}{2}$ et $\mathrm{I}_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^1 dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = [\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - 0 = 1$
2. Pour tout $n \geq 0$, on a par IPP : $(u(t) = (\cos t)^{n+1}$ et $v'(t) = \cos t)$. :

$$\mathrm{I}_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{n+1} \cos t dt = \left[(\cos t)^{n+1} \sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n (\sin t)^2 dt$$

$$\mathrm{I}_{n+2} = 0 + (n+1))\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n (1 - (\cos t)^2) dt$$

$$\mathrm{I}_{n+2} = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n - (\cos t)^{n+2} dt$$

$$\mathrm{I}_{n+2} = (n+1)[\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{n+2} dt]$$

$$\mathrm{I}_{n+2} = (n+1)[\mathrm{I}_n - \mathrm{I}_{n+2}]$$

$$\mathrm{I}_{n+2} = (n+1)\mathrm{I}_n - (n+1)\mathrm{I}_{n+2}$$

$$\mathrm{I}_{n+2} + (n+1)\mathrm{I}_{n+2} = (n+1)\mathrm{I}_n$$

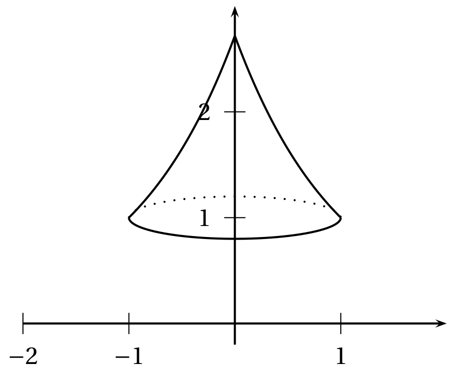
$$\mathrm{I}_{n+2}(n+2) = (n+1)\mathrm{I}_n$$

$$\mathrm{I}_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}\mathrm{I}_n$$

3. Ainsi $\mathrm{I}_2 = \frac{1}{2}\mathrm{I}_0 = \frac{\pi}{4}$, $\mathrm{I}_3 = \frac{2}{3}\mathrm{I}_1 = \frac{2}{3}$ et $\mathrm{I}_4 = \frac{3}{4}\mathrm{I}_2 = \frac{3\pi}{16}$.

Exercice 3.

Soit A$(0;e)$ et B$(1;1)$.
On considère le solide obtenu par rotation autour de l'axe des ordonnées de l'arc de courbe $\widehat{AB}$ comme représenté ci-dessous. On note V son volume.
On admet que $V = \pi \int_1^e (1-\ln t)^2 \, dt$.
Calculer V à l'aide de deux intégrations par parties successives.



$$V = \pi \int_1^e (1-\ln t)^2 \, dt = \pi \left[t(1-\ln t)^2 \right]_1^e - \int_1^e t \times \frac{2(1-\ln t)}{-t} dt = \pi(0 - 1 + \int_1^e 2 - 2\ln t \, dt) = \pi(-1 + 2(e-1) - 2\int_1^e \ln t \, dt)$$

De plus, encore par IPP,

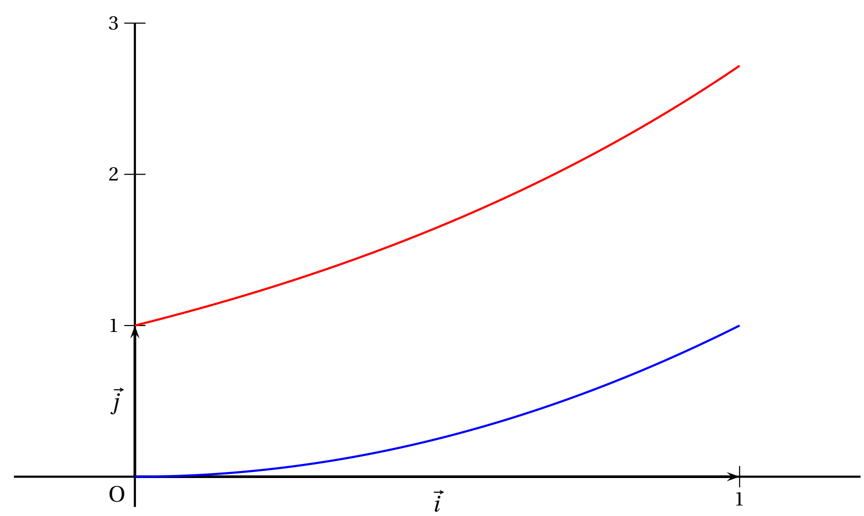
$$\int_1^e \ln t \, dt = [t \ln t]_1^e - \int_1^e t \times \frac{1}{t} dt = e - \int_1^e 1 dt = e - (e-1) = 1$$

Par conséquent :

$$V = \pi(-1 + 2e - 2 - 2) = \pi(-5 + 2e) \qquad \text{u.v}$$

Exercice 4. On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$ et $g(x) = x^2$, $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leur représentation graphique dans un repère orthogonal.

1.



2. L'aire du domaine délimité par $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$ est donné par :

$$\int_0^1 e^x - x^2 dx = \left[e^x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = e - \frac{1}{3} - 1 = e - \frac{4}{3} \quad \text{u.a}$$

En effet on a pour tout $x \in [0;1]$ $e^x \geq x^2$. Etant donné que les fonctions exponentielles et carré sont croissantes sur $[0;1]$ on a, pour $x \in [0;1]$:

$$e^x \geq e^0 = 1 \qquad \text{et} \qquad x^2 \leq 1^2 = 1$$

Ce qui au final donne bien :

$$\forall x \in [0;1] \quad e^x \geq x^2$$