Correction du devoir Maison 12

La fonction logarithme décimal (notée log) est définie pour $x > 0$ par :

$$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

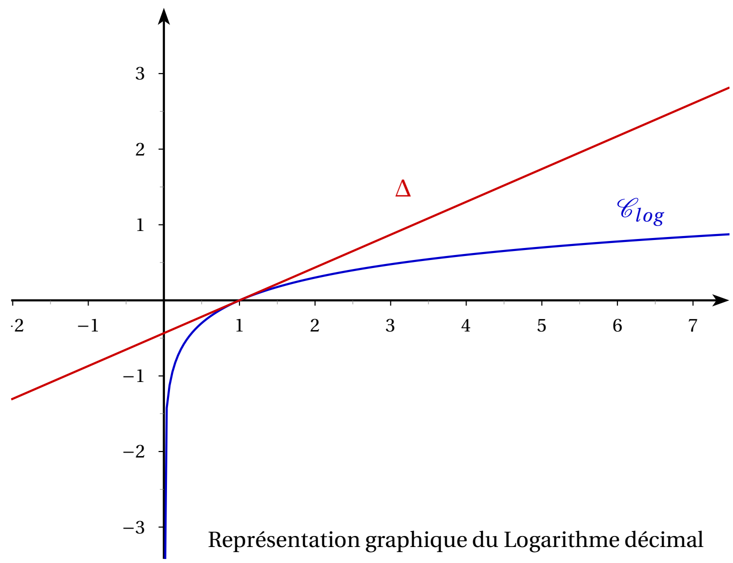
1. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a :
$$\log 10^n = \frac{\ln 10^n}{\ln 10} = \frac{n \ln 10}{\ln 10} = n$$

2. Notons $f(x) = \log x$ pour $x > 0$ et étudions le signe de $f'(x)$:
$$f'(x) = \frac{1}{x \ln 10}$$
Etant donné que $\ln 10 > 0$ puisque $10 > 1$ et que $x > 0$, la fonction logarithme décimal admet une dérivée strictement positive sur $\mathbb{R}^{+*}$ et donc elle est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.
De plus :
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{\ln 10} = \lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$$
puis :
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\ln 10} = \lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$$
Ainsi f admet une asymptote verticale en 0. On résume ceci dans un tableau de variation :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3. L'équation de la tangente Δ au point d'abscisse 1 de la fonction logarithme décimal est de la forme :
$$y = f'(a)(x-a) + f(a) \qquad \text{avec } a = 1$$
Ainsi
$$y = f'(1)(x-1) + f(1)$$
Or, $f(1) = \log 1 = \log 10^0 = 0$ d'après la question 1 et $f'(1) = \dfrac{1}{\ln 10}$, ce qui donne :
$$y = \frac{1}{\ln 10}(x-1) = \frac{1}{\ln 10}x - \frac{1}{\ln 10}$$

4.



Représentation graphique du Logarithme décimal

5. On a :
   - tout entier N est compris entre deux puissances de 10 successives i.e il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que

   $$10^p \leq N < 10^{p+1}$$

   - dans ce cas $p+1$ est le nombre de chiffres de N.

   Par conséquent si n s'écrit avec $p+1$ chiffres, alors :

   $$10^p \leq N < 10^{p+1} \Longleftrightarrow \log 10^p \leq \log N < \log 10^{p+1} \Longleftrightarrow p \log 10 \leq \log N < (p+1)\log 10 \Longleftrightarrow p \leq \log N < p+1$$

   Ainsi $E(\log N) = p$, et donc N s'écrit avec $E(\log n) + 1$ chiffres.

6. **Application**
   (a) 2002^{2003} s'écrit avec $E(\log 2002^{2003}) + 1$ chiffres. Or,

   $$\log 2002^{2003} = 2003 \log 2002 \simeq 6612$$

   Ainsi $E(\log 2002^{2003}) = 6612$ et donc 2002^{2003} s'écrit avec 6613 chiffres.

   (b) On procède de la manière que pour la question précédente, $2^{6972593} - 1$ s'écrit avec $E(\log(2^{6972593} - 1)) + 1 = E(\log 2^{6972593}) - 1 + 1 = E(\log 2^{6972593})$ chiffres.
   Or, $\log 2^{6972593} = 6972593 \log 2 \simeq 2098959$ et ainsi $E(2^{6972593}) = 2098959$, on peut conclure que pour écrire cet immense nombre premier il faut utiliser 2098959 chiffres, et puis beaucoup de patiente et de temps...

   (c) La magnitude d'un séisme d'intensité I est mesurée sur l'échelle de Richter par :

   $$M = \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

   où I_0 est une intensité de référence.

   i. Placer sur l'échelle de Richter les séismes suivants :

   A. îles Macquarie (1989), $I = 1,995 \times 10^8 I_0$;

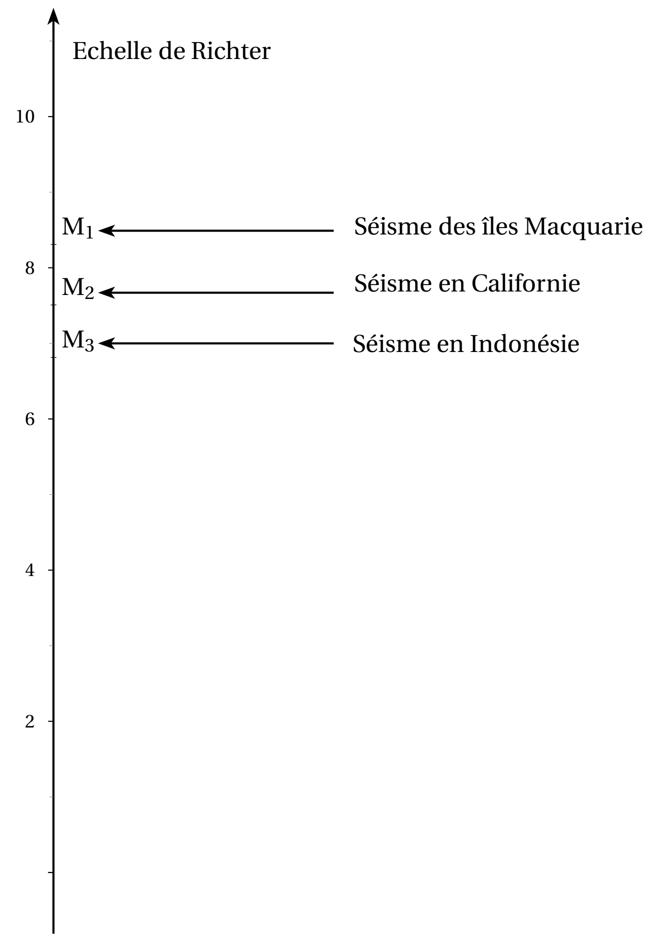
   $$M_1 = \log\left(\frac{I}{I_0}\right) = \log\left(\frac{1,995 \times 10^8 I_0}{I_0}\right) = \log(1,995 \times 10^8) = \log(1,995) + \log 10^8 = 8 + \log 1,995 \simeq 8,3$$

   B. Californie (1992), $I = 3,16 \times 10^7 I_0$;

   $$M_2 = 7 + \log 3,16 \simeq 7,5$$

   C. Indonésie, îles flores (1993), $I = 6,3 \times 10^6 I_0$;

   $$M_3 = 6 + \log 6,3 \simeq 6,8$$



ii. L'énergie E (en joules) libérée au foyer du séisme est liée à la magnitude par la relation :

$$\log E = a + bM$$

a et b étant des constantes.
Calculer a et b sachant qu'un séisme de magnitude 8 met en jeu environ 30000 fois plus d'énergie qu'un séisme de magnitude 5, lui-même libérant une énergie de $0,2 \times 10^{20}$ joules.
On cherche donc à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \log(0,2 \times 10^{2}0) = \log 0,2 + 20 = a + 5b \\ \log 6 + 23 = a + 8b \end{cases}$$

On retranche les deux équations membre à membre et on trouve :

$$3b = \log 6 - \log 0,2 + 3 = \log \frac{6}{0,2} + 3 = \log 30 + 3 = \log 3 + 4 \Longrightarrow b = \frac{\log 3 + 4}{3} \simeq 1,5$$

On utilise la première équation pour trouver a :

$$a = \log 0,2 + 20 - \frac{5\log 3 + 20}{3} = \frac{3\log 0,2 + 60 - 5\log 3 - 20}{3} = \frac{3\log 0,2 - 5\log 3 + 40}{3} = \frac{-3\log 5 - 5\log 3 + 40}{3} \simeq 11,84$$