Correction du devoir Maison 11

1. Par définition de l'expression complexe de la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$: $z' = e^{i\frac{2\pi}{3}}z$.

   Donc, en particulier : $z_B = e^{i\frac{2\pi}{3}}z_A = e^{i\frac{2\pi}{3}} \times e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{i\pi} = -1$

   De même : $z_C = e^{i\frac{2\pi}{3}}z_B = e^{i\frac{2\pi}{3}} \times e^{i\pi} = e^{i\frac{5\pi}{3}} = e^{-i\frac{\pi}{3}} = \overline{z_A}$

   Donc A et C sont symétriques autour de l'axe des réels.

2. (a) $|z_A| = |z_B| = |z_C| = 1$, donc : OA = OB = OC = 1. Les trois points A, B et C sont à la distance 1 du point O : ils appartiennent au cercle de centre O ($\mathscr{C}$) circonscrit au triangle ABC.

   Construction : on dessine le cercle ($\mathscr{C}$) et le cercle de centre le point d'affixe 1 et de rayon 1 ; ces deux cercles sont sécants en A et C, le point A étant celui qui a une ordonnée positive. B est le point d'intersection de ($\mathscr{C}$) avec le demi-axe contenant les points d'affixes négatives.

   (b) On a $z_A+z_B+z_C = 0$, autrement dit O est l'isobarycentre des points A, B et C, donc le centre de gravité du triangle (ABC). Ce triangle est isocèle en B. De plus $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \dfrac{e^{i\frac{5\pi}{3}} - e^{i\frac{\pi}{3}}}{-1 - e^{i\frac{\pi}{3}}} = \dfrac{e^{i\frac{\pi}{3}} \times \left(e^{i\frac{4\pi}{3}} - 1\right)}{e^{i\frac{4\pi}{3}} - 1} = e^{i\frac{\pi}{3}}$.

   Le module de ce complexe est égal à 1, donc AB = AC et en conclusion le triangle (ABC) est équilatéral.

3. (a) Cf. figure.

   (b) Le triangle PQR homothétique de ABC est semblable à ce triangle, donc lui aussi équilatéral.

4. (a) L'écriture complexe de h est :

   $$z' = -2z.$$

   (b) $z_A + z_B + z_C = 0$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

   O est le centre du cercle circonscrit au triangle équilatéral ABC, il en est aussi le centre de gravité (isobarycentre des points A, B et C), alors $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$.

   Par conséquent : $z_A + z_B + z_C = 0 \iff z_A = -z_B - z_C \iff z_A = \dfrac{1}{2}(-2z_B - 2z_C) = \dfrac{1}{2}(z_Q + z_R)$.

   Cette égalité signifie que A est le milieu du segment [QR].

   (c) Par définition de l'homothétie P, O et A sont alignés. La droite (PA) médiane du triangle équilatéral (PQR) est aussi hauteur ; donc (OA) est perpendiculaire à la droite (QR).

   Conclusion : cette droite (QR) est la tangente en A au cercle $\mathscr{C}$.