Devoir Maison 2

Exercice 1. (5 points)

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ (2 cm pour une unité graphique).
On appelle Γ le cercle de centre O et de rayon 1.
On fera une figure que l'on complétera tout au long de l'exercice.
On appelle f l'application du plan privé du point O dans P qui, à tout point M différent de O, d'affixe z, associe le point $M' = f(M)$ d'affixe z' définie par :

$$z' = z + i - \frac{1}{z}$$

1. On considère les points A et B d'affixes respectives $a = i$ et $b = e^{i\frac{\pi}{6}}$ et leurs images A' et B' par f d'affixes respectives a' et b'.
   (a) Calculer a' et b'.
   (b) Placer les points A, A', B et B'.
   (c) Démontrer que
   $$\frac{-b}{b'-b} = \frac{\sqrt{3}}{3}i$$
   (d) En déduire la nature du triangle OBB'
2. Le but de cette question est de déterminer l'ensemble (E) des points du plan P privé de O qui ont pour image O par f.
   (a) Démontrer que, pour tout nombre complexe z :
   $$z^2 + iz - 1 = \left(z + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)\left(z - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$
   (b) En déduire les affixes des points de l'ensemble (E).
   (c) Démontrer que les points de (E) appartiennent à Γ
3. Soit θ un réel.
   (a) Démontrer que si $z = e^{i\theta}$, alors $z' = (2\sin\theta + 1)i$
   (b) En déduire que si M appartient au cercle Γ alors M' appartient au segment $[A'C]$ où C a pour affixe $-i$.