Devoir Maison 9

Partie I

On donne un entier naturel n strictement positif, et on considère l'équation différentielle :

$$(\mathrm{E}_n) \qquad y' + y = \frac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}.$$

1. On fait l'hypothèse que deux fonctions g et h, définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, vérifient, pour tout x réel :

$$g(x) = h(x)\mathrm{e}^{-x}.$$

   (a) Montrer que g est solution de (E_n) si et seulement si, pour tout x réel,

$$h'(x) = \frac{x^n}{n!}.$$

   (b) En déduire la fonction h associée une solution g de (E_n), sachant que $h(0) = 0$. Quelle est alors la fonction g ?

2. Soit φ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

   (a) Montrer que φ est solution de (E_n) si et seulement si $\varphi - g$ est solution de l'équation :

$$(\mathrm{F}) \qquad y' + y = 0.$$

   (b) Résoudre (F).

   (c) Déterminer la solution générale φ de l'équation (E_n).

   (d) Déterminer la solution f de l'équation (E_n) vérifiant $f(0) = 0$.

Partie II

On pose, pour tout x réel,

$$f_0(x) = \mathrm{e}^{-x}, \ f_1(x) = x\mathrm{e}^{-x}.$$

1. Vérifier que f_1 est solution de l'équation différentielle : $y' + y = f_0$.
2. Pour tout entier strictement positif n, on définit la fonction f_n comme la solution de l'équation différentielle $y' + y = f_{n-1}$ vérifiant $f_n(0) = 0$. En utilisant la **Partie I**, montrer par récurrence que, pour tout x réel et tout entier $n \geqslant 1$:

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}.$$