Devoir Maison 8

Exercice 1 :

On souhaite étudier et représenter graphiquement la fonction tangente :

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

1. (a) Résoudre l'équation $\cos x = 0$.
   (b) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction tangente.
   (c) Etudier la parité de la fonction tangente.
   (d) Montrer que la fonction tangente est périodique de période π.
   Remarque : Par conséquent, on va se contenter d'étudier la fonction tangente sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$, puis à l'aide de la parité on complétera le tracé par la symétrie de centre O, et à l'aide de la périodicité par une série de translation « horizontale ».

2. Etudier les limites de la fonction tangente en 0^+ et en $\frac{\pi}{2}^-$.
   En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction tangente admet une asymptote dont on précisera la nature et l'équation.
3. Etudier les variations de la fonction tangente sur $I = \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$. On montrera que :
$$\tan' x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$
4. (a) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
   (b) Démontrer que pour tout $x \in I$, on a :
$$\tan x \geq x$$
   [a]
   (c) En déduire, la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à sa tangente T.
5. Tracer, très soigneusement les droites Δ, T et la courbe $\mathscr{C}$. (On se placera entre les bornes -2π et 2π)

[a] On pourra étudier les variations de la fonction g définie sur I par $g(x) = \tan x - x$.