Devoir Maison 7

Vous traiterez un exercice au choix.

Exercice 1. *Une caractérisation des fonctions égales à leur réciproque* (5 points)
On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f \circ f(x) = x$$

et $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1. Soit g la fonction définie sur $[0;1]$ par
$$f(x) = x - 2\sqrt{x} + 1$$
   (a) Etudier les variations de la fonction g.
   (b) Montrer que pour tout $x \in [0;1]$ on a $g \circ g(x) = x$.
   (c) Contruire la représentation graphique $\mathscr{C}_g$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
2. (a) Montrer que si $M(x;y) \in \mathscr{C}_f$ alors $M'(y;x) \in \mathscr{C}_f$.
   (b) En déduire une symétrie de la représentation graphique $\mathscr{C}_f$.

Exercice 2. *Continuité* (5 points)
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2(2-x) & \text{si} \quad x \in [0;2[\\ f(2+x) = f(x) & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

1. (a) La fonction f est-elle continue sur $[0;2]$?
   (b) Etudier les variations de f sur $[0;2]$ puis construire la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de f sur $[0;2]$.
   (c) Comment peut-on en déduire la représentation graphique de f sur l'intervalle $[2n;2n+2]$ où $n \in \mathbb{Z}$?
2. Démontrer que si $x \in [2n;2n+2]$, alors
$$f(x) = (x-2n)^2(2n+2-x)$$
3. Est-ce que f est continue sur $\mathbb{R}$?