Devoir Maison 6

1. La suite u est définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{23}{27}$ pour tout entier naturel n.
   (a) On a représenté ci-dessous dans un repère orthonormé direct du plan, la droite d'équation $y = \frac{1}{3}x + \frac{23}{27}$ et le point A de coordonnées $(2;0)$. Construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite u.
   (b) Démontrer que si la suite u est convergente, alors sa limite $\ell = \frac{23}{18}$.
   (c) Démontrer que pour tout entier naturel n, on a $u_n \geq \frac{23}{18}$.
   (d) Etudier la monotonie de la suite u et donner sa limite.
2. (a) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. Démontrer que :

$$\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{10^k} = \frac{1}{90}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$$

   c'est-à-dire que

$$\frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots + \frac{1}{10^{n+1}} = \frac{1}{90}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$$

   (b) La suite v est définie par $v_n = 1,2777\ldots7$ avec n décimales consécutives égales à 7.
   Ainsi $v_0 = 1,2$, $v_1 = 1,27$ et $v_2 = 1,277$.
   En utilisant le (a), démontrer que la limite de la suite v est un nombre rationnel r (i.e le quotient de deux entiers).
3. La suite u définie au 1. et la suite v sont-elles adjacentes ? Justifier.