Devoir Maison 5

Exercice 1. 2010 (5 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = 6 - \frac{5}{x+1}.$$

Le but de cet exercice est d'étudier des suites (u_n) définies par un premier terme positif ou nul u_0 et vérifiant pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = f\left(u_n\right).$$

1. Etude de propriétés de la fonction f
   (a) Etudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
   (b) Résoudre dans l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ l'équation $f(x) = x$.
   On note α la solution.
   (c) Montrer que si x appartient à l'intervalle $[0\ ;\ \alpha]$, alors $f(x)$ appartient à l'intervalle $[0\ ;\ \alpha]$.
   De même, montrer que si x appartient à l'intervalle $[\alpha, +\infty[$ alors $f(x)$ appartient à l'intervalle $[\alpha\ ;\ +\infty[$.
2. Etude de la suite (u_n) pour $u_0 = 0$
   Dans cette question, on considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n :

   $$u_{n+1} = f\left(u_n\right) = 6 - \frac{5}{u_n + 1}.$$

   (a) Sur le graphique représenté ci-dessous, sont représentées les courbes d'équations $y = x$ et $y = f(x)$.
   Placer le point A_0 de coordonnées $(u_0\ ;\ 0)$, et, en utilisant ces courbes, construire à partir de A_0 les points A_1, A_2, A_3 et A_4 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives $u_1,\ u_2,\ u_3$ et u_4.
   Quelles conjectures peut-on mettre quant au sens de variation et la convergence de la suite (u_n) ?
   (b) Démontrer, par récurrence, que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$.
   (c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
3. Etude des suites (u_n) selon les valeurs du réel positif ou nul u_0
   Dans cette question, toute trace d'argumentation, même incompleète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'eévaluation.
   Que peut-on dire du sens de variation et de la convergence de la suite (u_n) suivant les valeurs du réel positif ou nul u_0 ?