Devoir Maison 4

Exercice 1. 2010 (5 points)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2$$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. (a) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 4$, $u_n \geq 0$
   (b) En déduire que pour tout entier $n \geq 5$, $u_n \geq n - 3$
   (c) En déduire la limite de la suite (u_n).
3. On définit la suite (v_n) par, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = -2u_n + 3n - \frac{21}{2}$$

   (a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison. et le premier terme.
   (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{25}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}$$

   (c) Soit la somme S_n définie pour tout entier naturel n par

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

   Déterminer l'expression de S_n en fonction de n.