

**Devoir Maison 3****Exercice 1.**

(3,5 points)

On considère la suite  $(u_n)$  définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 4 \end{cases}$$

et la suite  $(v_n)$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par :

$$v_n = u_n - 6$$

1. Pour tout entier  $n$ , calculer  $v_{n+1}$  en fonction de  $v_n$ . Quelle est la nature de la suite  $(v_n)$  ?
2. Déterminer le sens de variation de  $(v_n)$ .
3. En déduire le sens de variation de  $(u_n)$ .
4. Démontrer, de deux manières différentes, que pour tout entier naturel  $n$  :

$$u_n = -5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + 6$$

5. Etudier la convergence de la suite  $(u_n)$ .

**Exercice 2.**

(1,5 points)

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 0$  et pour tout entier naturel  $n$  :

$$u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}}$$

Montrer, par récurrence, que pour tout  $n \geq 1$  on a  $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq u_n \leq 1$