DM 18 : Produit scalaire

On se propose d'étudier une modélisation d'une tour de contrôle de trafic aérien, chargée de surveiller deux routes aériennes représentées par deux droites de l'espace.
L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ d'unité 1 km. Le plan $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$représente le sol.
Les deux « routes aériennes »à contrôler sont représentées par deux droites (D_1) et (D_2) , dont on connaît des représentations paramétriques :

$$(D_1)\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 3+a \\ y & = & 9+3a \\ z & = & 2 \end{array}\right. \text{ avec } \quad a\in\mathbb{R} \qquad (D_2)\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 0,5+2b \\ y & = & 4+b \\ z & = & 4-b \end{array}\right. \text{ avec } \quad b\in\mathbb{R}$$

1. (a) Indiquer les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{u_1}$ directeur de la droite (D_1) et d'un vecteur $\overrightarrow{u_2}$ directeur de la droite (D_2).

   (b) Prouver que les droites (D_1) et (D_2) ne sont pas coplanaires.
2. On veut installer au sommet S de la tour de contrôle, de coordonnées S(3 ; 4 ; 0,1) , un appareil de surveillance qui émet un rayon représenté par une droite notée (R) . Soit (P_1) le plan contenant S et (D_1) et soit (P_2) le plan contenant S et (D_2).

   (a) Montrer que (D_2) est sécante à (P_1) .

   (b) Montrer que (D_1) est sécante à (P_2).

   (c) Un technicien affirme qu'il est possible de choisir la direction de (R) pour que cette droite coupe chacune des droites (D_1) et (D_2). Cette affirmation est-elle vraie ? Justifier la réponse.