DM 14 : Intégration et suite

Exercice 1. (*Facultatif*)

On considère la suite numérique (J_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par

$$J_n = \int_1^n e^{-t}\sqrt{1+t}\,dt.$$

1. Démontrer que la suite (J_n) est croissante.
2. On définit la suite (I_n), pour tout entier naturel n non nul, par :

$$I_n = \int_1^n (t+1)e^{-t}\,dt.$$

   (a) Justifier que, pour tout $t \geqslant 1$, on a $\sqrt{t+1} \leqslant t+1$.

   (b) En déduire que $J_n \leqslant I_n$.

   (c) Calculer I_n en fonction de n. En déduire que la suite (J_n) est majorée par un nombre réel (indépendant de n).

   (d) Que peut-on en conclure pour la suite (J_n) ?

Exercice 2. Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Partie A

La courbe $(\mathscr{C})$, donnée en annexe, est la courbe représentative d'une fonction f dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$, de fonction dérivée f' continue sur $[0\,;\,+\infty[$.

La courbe $(\mathscr{C})$ passe par les points O et $A\left(1\,;\,\dfrac{1}{2e}\right)$ et, sur $[0\,;\,1]$, elle est au dessus du segment [OA].

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f'(x)\,dx = \frac{1}{2e}$
2. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx \geqslant \frac{1}{4e}$

Partie B

On sait désormais que la fonction f considérée dans la partie A est définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{xe^{-x}}{x^2+1}.$$

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
2. On considère la fonction g définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par : $g(x) = x^3+x^2+x-1$.
   Etablir que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
3. (a) Montrer que pour tout x de $[0\,;\,+\infty[$, $f'(x)$ et $g(x)$ sont de signes contraires.

   (b) En déduire les variations de f sur $[0\,;\,+\infty[$.
4. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \int_n^{2n} f(x)\,dx.$$

   (a) Montrer que pour tout x de $[0\,;\,+\infty[$, $0 \leqslant \dfrac{x}{x^2+1} \leqslant \dfrac{1}{2}$.

   (b) Montrer que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{2}\left(e^{-n}-e^{-2n}\right)$.

   (c) En déduire la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.

ANNEXE

Exercice 2

Cette page ne sera pas à rendre avec la copie