DM 13 : Différentes manières de calculer une intégrale

Exercice 1. On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = x^2 - 3x + 3 - \frac{1}{x}$$

1. Déterminer une primitive de f sur $]0;+\infty[$.
2. En déduire :
$$\int_1^4 f(x)dx$$
3. Montrer que, pour tout $x \in]0;+\infty[$ on a :
$$f(x) = \frac{(x-1)^3}{x}$$
4. Déterminer, à l'aide d'une intégration par parties,
$$\int_1^4 3(x-1)^2 \ln x dx$$

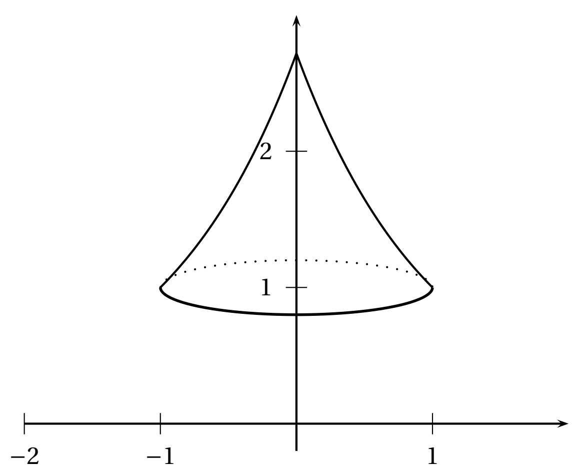
Exercice 2. On considère la suite (I_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\mathrm{I}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n dt$$

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a :
$$\mathrm{I}_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}\mathrm{I}_n$$
3. En déduire I_2, I_3 et I_4.

Exercice 3.

Soit $A(0;e)$ et $B(1;1)$.
On considère le solide obtenu par rotation autour de l'axe des ordonnées de l'arc de courbe $\overset{\frown}{AB}$ comme représenté ci-dessous. On note V son volume.
On admet que $V = \pi \int_1^e (1-\ln t)^2 \, dt$.
Calculer V à l'aide de deux intégrations par parties successives.



Exercice 4. On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$ et $g(x) = x^2$, $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leur représentation graphique dans un repère orthogonal.

1. Tracer $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sur $[0;1]$.
2. Déterminer l'aire du domaine délimité par $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$